Nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes

Ayoub Hajlaoui

Combien nous faudrait-il de pioches en moyenne ?
L'infini se faufile en teintes népériennes.

Énoncé : (temps conseillé : 1 h 40 min) *D'après Ecricome ECS 2010*

r est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient r boules numérotées 1,2,...,r. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable.

Pour tout entier $i \in [\![1; r]\!]$, on désigne par Y_i la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes. Il est immédiat que $Y_1 = 1$.
On désigne par X_r la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r boules numérotées 1,2,...,r. Il est immédiat que $X_r = Y_r$.
On admettra que les variables aléatoires $Y_2 - Y_1$, $Y_3 - Y_2$,...,et $Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes.

1) On suppose dans cette question que $r = 3$.
a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_2 > n)$.
b) Donner la loi de la variable aléatoire Y_2.
c) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P\big([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\big)$, et en déduire la loi de la variable aléatoire $Y_3 - Y_2$.

2) Soit $i \in [\![1; r - 1]\!]$
a) Déterminer $Y_i(\Omega)$ et $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega)$
b) Justifier que : $\forall n \geq 1,\ \forall k \geq i,\ P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)$
c) En déduire que $E(Y_{i+1} - Y_i) = \dfrac{r}{r - i}$ et $V(Y_{i+1} - Y_i) = \dfrac{ri}{(r - i)^2}$
$E(.)$ et $V(.)$ désignant respectivement l'espérance et la variance
d) Démontrer que $E(X_r) = r \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i}$ et $V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i}$

3) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} - \ln(n)$
a) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$ et démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$
b) Prouver l'existence de deux réels α et β tels que $E(X_r) \underset{r\to+\infty}{=} r\ln(r) + \alpha r + o(r)$ et $V(X_r) \underset{r\to+\infty}{\sim} \beta r^2$

Correction :

1)a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[Y_2 > n]$ est : « il faut attendre d'avoir fait plus de n pioches pour obtenir deux numéros distincts », ce qui revient à dire : « les n premières pioches ont donné le même numéro »*Cette reformulation plus simple va nous permettre de calculer la probabilité demandée.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soient U_k, D_k et T_k les événements respectifs :
- la k-ième pioche donne la boule numérotée 1
- la k-ième pioche donne la boule numérotée 2
- la k-ième pioche donne la boule numérotée 3

Rappelons qu'il n'y a que 3 boules dans toute la question 1.

Avec ces notations : $[Y_2 > n] = \Big(\bigcap_{k=1}^{n} U_k\Big) \cup \Big(\bigcap_{k=1}^{n} D_k\Big) \cup \Big(\bigcap_{k=1}^{n} T_k\Big)$

En effet, comment est-il possible de n'avoir obtenu qu'un seul numéro au cours des n premières pioches ? Soit en n'ayant obtenu que le numéro 1, soit en n'ayant obtenu que le numéro 2, soit en n'ayant obtenu que le numéro 3...

Par union d'événements incompatibles, nous avons donc :

$P(Y_2 > n) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} U_k\Big) + \Big(\bigcap_{k=1}^{n} D_k\Big) + \Big(\bigcap_{k=1}^{n} T_k\Big)$. Puis, par indépendance des pioches *(remise)*,

$$P(Y_2 > n) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k) + \prod_{k=1}^{n} P(D_k) + \prod_{k=1}^{n} P(T_k) = \Big(\frac{1}{3}\Big)^n + \Big(\frac{1}{3}\Big)^n + \Big(\frac{1}{3}\Big)^n = 3 \times \Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}$$

(chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable)

Nous avons donc montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_2 > n) = \Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}}$

1)b) Commençons par déterminer l'ensemble $Y_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_2.

Y_2 est la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir 2 boules distinctes. Il faut au moins 2 pioches pour obtenir 2 boules distinctes, et tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 sont des valeurs que Y_2 peut atteindre. D'où $\boxed{Y_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \backslash \{1\}}$

Maintenant, comment calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $P(Y = k)$? Nous avons déjà travaillé à la question précédente...

Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $P(Y = k) = P(Y > k - 1) - P(Y > k)$

Remarquez en effet que $[Y > k - 1] = [Y > k] \cup [Y = k]$, avec $[Y > k - 1]$ et $[Y = k]$ incompatibles...

Maintenant, on serait tenté d'utiliser tout de suite 1)a) pour remplacer $P(Y > k-1)$ et $P(Y > k)$, mais attention, le cas échéant, à bien justifier que l'expression est valable...

Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $k \geq 2$ donc $k - 1 \geq 1$ Donc $k - 1 \in \mathbb{N}^*$ (et, évidemment, $k \in \mathbb{N}^*$)

On peut donc exprimer $P(Y_2 > k)$ et $P(Y_2 > k - 1)$ en utilisant 1)a).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $P(Y_2 = k) = \Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-2} - \Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1} = \Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-2}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\},\ P(Y_2 = k) = \frac{2}{3} \times \Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-2}}$

Remarquons au passage - même si l'énoncé ne le demande pas - que $(Y_2 - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_2 - 1 = k) = P(Y_2 = k + 1) = \frac{2}{3} \times \Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1} = \frac{2}{3} \times \Big(1 - \frac{2}{3}\Big)^{k-1}$

$Y_2 - 1$ suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

1)c) $\left([Y_2 = k]\right)_{k\geq 2}$ est un système complet d'événements (car $Y_2(\Omega) = \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$)
La formule des probabilités totales fournit donc, pour tout $n \geq 1$:

$$P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{n} P\left([Y_3 - Y_2 = n] \cap [Y_2 = k]\right) = \sum_{k=2}^{n} P\left([Y_3 - k = n] \cap [Y_2 = k]\right)$$

Donc : $\boxed{P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P\left([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\right)}$

Ici, attention à ne pas succomber aux sirènes d'une indépendance tentante - mais fallacieuse - entre Y_2 et Y_3... Voyons plutôt à quoi correspond l'événement $[Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]$
$(Y_3 - Y_2)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (au moins une pioche supplémentaire pour obtenir le numéro suivant)
Pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \geq 2$, l'événement $[Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]$ est :
« il faut attendre k pioches pour qu'apparaisse le deuxième numéro, puis n pioches supplémentaires pour qu'apparaisse le troisième numéro. »

Si $n > 1$, cet événement est composé d'une union disjointe de $3!$ événements équiprobables, dont l'un est $\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i\right) \cap D_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n+k-1} \overline{T_k}\right) \cap T_{n+k}$
($k - 1$ pioches qui donnent 1, la k-ième qui donne 2, les $n - 1$ suivantes ne donnent pas encore 3, et celle d'après donne 3)
Pourquoi « si n > 1 » ? Parce que si $n = 1$, T_{k+1} vient immédiatement après D_k (et il n'y a pas $\bigcap_{i=k+1}^{k} \overline{T_k}$ entre D_k et T_{k+1})
Pourquoi $3!$ événements ? Pour compter toutes les permutations possibles de $\{1, 2, 3\}$

Donc, si $n > 1$, $P\left([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\right) = 3! \times P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i\right) \cap D_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n+k-1} \overline{T_k}\right) \cap T_{n+k}\right)$
Puis, par indépendance des pioches :

$$P\left([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\right) = 3! \times \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(U_i)\right) \times P(D_k) \times \left(\prod_{i=k+1}^{n+k-1} P(\overline{T_k})\right) \times P(T_{n+k})$$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = 2 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

De même, pour $n = 1$,

$$P\left([Y_3 = k+1] \cap [Y_2 = k]\right) = 3! \times \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(U_i)\right) \times P(D_k) \times P(T_{k+1}) = 2 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3}$$

En conclusion : $\forall n \geq 1$, $\forall k \geq 2$, $P\left([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$
Même si la formule est valable aussi pour $n = 1$, il était rigoureux de traiter le cas $n = 1$ à part.

En reprenant l'expression obtenue précédemment de $P(Y_3 - Y_2 = n)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P\left([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Donc (par changement d'indice) : $P(Y_3 - Y_2 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$

(cf série géométrique)

On a finalement montré : $\boxed{(Y_3 - Y_2)(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_3 - Y_2 = n) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n}}$

2)a) *Attention, dans cette question, r n'est plus nécessairement égal à 3*
Pour tout $i \in [\![1; r-1]\!]$, Y_i est le rang d'apparition du i-ème numéro. Donc $\boxed{Y_i(\Omega) = \mathbb{N}\backslash[\![0; i - 1]\!]}$

Et (même justification que pour $(Y_3 - Y_2)(\Omega)$, cf 1-c), $\boxed{(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

2)b) Pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \geq i$, $P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = n)$ est la probabilité sachant qu'on a pioché exactement i numéros distincts aux k premières pioches, de piocher parmi uniquement des numéros parmi ces i numéros aux $n-1$ pioches suivantes, puis de piocher un nouveau numéro (donc parmi les $r - i$ numéros restants) à la pioche d'après.
Donc (par indépendance des pioches) : $P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \times \left(\frac{r-i}{r}\right)$

D'où : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1, \text{ pour tout } k \geq i,\ P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{i}{r}\right)}$

2)c) D'après 2)a), $\big([Y_i = k]\big)_{k \geq i}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales fournit donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} P\big([Y_{i+1} - Y_i = n] \cap [Y_i = k]\big)$

Et la formule des probabilités conditionnelles donne :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = n) \times P(Y_i = k)$. Puis, en utilisant 2)b) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{i}{r}\right) \times P(Y_i = k)$

Oui mais que faire ensuite de cette horrible somme ? D'autant plus qu'on ne connaît pas $P(Y_i = k)$... Et bien, tout simplement, on respire un bon coup et on sort du terme général le(s) facteur(s) qui ne dépendent pas de la variable de sommation k...

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{i}{r}\right) \times \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k)$

Mais on ne connaît toujours pas $P(Y_i = k)$!! Encore une fois, on respire un bon coup, et on se souvient qui est $Y_i(\Omega)$.

Or, $Y_i(\Omega) = \mathbb{N} \backslash [\![0; i-1]\!] = \{k \in \mathbb{N},\ k \geq i\}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k) = 1$.

Plus de peur que de mal, finalement, non ?

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{i}{r}\right)$

On reconnaît une loi géométrique mais attention ! Son paramètre n'est pas $\frac{i}{r}$...

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(1 - \frac{r-i}{r}\right)^{n-1} \times \left(\frac{r-i}{r}\right)$ (et $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N}^*$)

Donc $Y_{i+1} - Y_i$ suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{r-i}{r} = 1 - \frac{i}{r}$

Et du coup, nous pouvons obtenir immédiatement son espérance et sa variance...

Donc $E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{1}{p}$ et $V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{1-p}{p^2}$

D'où : $\boxed{E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i}}$ et $V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{i}{r} \times \left(\frac{r}{r-i}\right)^2$ donc $\boxed{V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{ri}{(r-i)^2}}$

2)d) *Qui est ce X_r, déjà ? Quel rapport avec les $Y_{i+1} - Y_i$ qui précèdent ? Ça sent le télescopage..*

$\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} Y_{i+1} - Y_i = Y_r - Y_1$ par télescopage. Or, par définition, $Y_r = X_r$ et $Y_1 = 1$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Donc $X_r - 1 = \sum_{i=1}^{r-1} Y_{i+1} - Y_i$, et donc $X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} Y_{i+1} - Y_i$

Par linéarité de l'espérance, et comme chacune des $r-1$ variables aléatoires $Y_{i+1} - Y_i$ admet une espérance (cf 2c) : $E(X_r) = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} E(Y_{i+1} - Y_i) = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{r-i}$

Mais comment arriver à l'expression demandée par l'énoncé ? Un petit changement d'indice devrait faire l'affaire...

Par changement d'indice $(j = r - i)$: $E(X_r) = 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{r}{j} = 1 + r \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{j} = 1 + r\left(\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j}\right) - r \times r$

Finalement, on a bien : $\boxed{E(X_r) = r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}}$

Et $V(X_r) = V\left(1 + \sum_{i=1}^{r-1} Y_{i+1} - Y_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^{r-1} Y_{i+1} - Y_i\right)$.

Par indépendance des variables aléatoires $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \ldots Y_r - Y_{r-1}$, on obtient :

$V(X_r) = \sum_{i=1}^{r-1} V\left(Y_{i+1} - Y_i\right)$, puis $V(X_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{ri}{(r-i)^2}$ d'après 2c.

Et, par le même changement d'indice que précédemment $(j = r - i)$:

$$V(X_r) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{r(r-j)}{j^2} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{r^2 - rj}{j^2} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{r^2}{j^2} - \frac{rj}{j^2} = r^2 \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{j^2} - r \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{j} = r^2 \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i}$$

L'énoncé voudrait que les sommes aillent jusqu'à r... Et bien faisons-les aller jusqu'à r.

Donc $V(X_r) = r^2\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}\right) - r^2 \times \frac{1}{r^2} - r\left(\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i}\right) + r \times \frac{1}{r}$

Finalement : $\boxed{V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}}$

3)a) *Intéressons-nous au terme général de cette série dont on nous demande la nature.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} + \ln(n+1) = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}$

$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$.

Oui mais que faire avec ça ? Un développement limité pour trouver un équivalent intéressant, qui nous permettra de conclure quant à la nature de la série.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$ donc $u_n - u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n+1}$

Mais que faire avec ce $\frac{1}{n+1}$? Simplement :

$u_n - u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Le DL de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 1 en 0 suffisait ici, parce que le $\frac{1}{n}$ en facteur du $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ transformera le $o\left(\frac{1}{n}\right)$ en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc : $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. D'où : $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Or, $\dfrac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann à termes positifs convergente.

Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1}) \text{ converge}}$

Cela entraîne automatiquement la convergence de la suite (u_n). *C'est du cours !* En effet : en notant $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n - u_{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(u_n - u_{n+1}\right)$, on a, par télescopage : $\lim_{N\to+\infty} u_1 - u_{N+1} = S$. D'où, par somme de limites : $\lim_{N\to+\infty} -u_{N+1} = S - u_1$ puis, par produit de limites : $\lim_{N\to+\infty} u_{N+1} = u_1 - S$.

Autrement dit, $\lim_{N\to+\infty} u_N = u_1 - S$, et $\boxed{\text{la suite } (u_N) \text{ converge.}}$

(u_N), (u_n), *c'est la même suite.*

3)b) D'après 2)d), pour tout $r \geq 2$, $E(X_r) = r \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i} = r\left(u_r + \ln(r)\right)$ par définition de (u_n).

(u_n) converge d'après 3)a), donc en appelant α sa limite, nous avons : $u_r \underset{r\to+\infty}{=} \alpha + o(1)$

Donc $E(X_r) \underset{r\to+\infty}{=} r\left(\alpha + o(1) + \ln(r)\right)$.

$\boxed{\text{On a bien montré l'existence d'un réel } \alpha \text{ tel que } E(X_r) \underset{r\to+\infty}{=} r\ln(r) + \alpha r + o(r)}$

D'autre part, pour tout $r \geq 2$, $V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i}$

Or, la série de Riemann $\sum_{i\geq 1} \dfrac{1}{i^2}$ est convergente et strictement positive. Autrement dit, il existe $\beta > 0$ tel que $\lim_{r\to+\infty} \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i^2} = \beta$. Ou, dit autrement, tel que $\sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{i^2} \underset{r\to+\infty}{=} \beta + o(1)$

D'où : $V(X_r) \underset{r\to+\infty}{=} r^2\left(\beta + o(1)\right) - r\left(\alpha + o(1) + \ln(r)\right) = r^2\beta + o(r^2) - r\alpha + o(r) - r\ln(r)$

Or, $r\ln(r) \underset{r\to+\infty}{=} o(r^2)$ car $\ln(r) \underset{r\to+\infty}{=} o(r)$ par croissance comparée. Et $-r\alpha + o(r) \underset{r\to+\infty}{=} o(r^2)$.

Donc $V(X_r) \underset{r\to+\infty}{=} r^2\beta + o(r^2)$ (avec $\beta \neq 0$)

$\boxed{\text{On a bien montré l'existence d'un réel } \beta \text{ tel que } V(X_r) \underset{r\to+\infty}{\sim} r^2\beta}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com