Série, sh et tan

Ayoub Hajlaoui

La série diabolique, pourrait dire un Arabe.

Énoncé : (temps conseillé : 5 min)

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

Correction :

L'on pourrait se dire : « ouille ouille ouille, je sens bien qu'un développement limité pourrait m'aider, mais je ne me souviens plus des DL de sh et tan ! ». Bon.
Primo, il faut connaître ses DL usuels. Secundo, au besoin, l'on peut retrouver très facilement le DL de sh avec Taylor-Young, en se souvenant que $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, *et* $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$. *Et l'on peut retrouver relativement facilement le DL de tan.*
Tertio, on n'a vraiment pas besoin d'aller loin dans les DL ici... On a juste besoin des DL à l'ordre 2, ce qui revient, en fait, à les connaître à l'ordre 1, puisque les fonctions sh et tan sont impaires...

Les développements limités (usuels) de sh et tan en 0 à l'ordre 2 donnent :
$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ *Par imparité, le terme d'ordre 2 (pair) est nul.*
Donc : $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
D'où : $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Les $\frac{1}{n}$ *se simplifient, mais attention à ne pas faire l'horrible erreur d'écrire* $o\left(\frac{1}{n^2}\right) - o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$. *Non.* $o\left(\frac{1}{n^2}\right) - o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *c'est encore* $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *La seule chose que nous puissions dire d'une différence de deux quantités négligeables devant* $\frac{1}{n^2}$, *c'est qu'elle est elle-même négligeable devant* $\frac{1}{n^2}$. *Nous ne pouvons certainement pas en conclure qu'elle est nulle.*

Et maintenant, nous aimerions conclure par comparaison de séries à termes positifs. Mais $\sum_{n\geq 1} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ *est-elle une série à termes positifs ? En fait, peu importe, du moment que* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *l'est... Voyez plutôt :*

$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Autrement dit : $\left|\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \left|\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ converge.

Autrement dit, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \text{ converge absolument, donc converge.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com