Un calcul de limite

Ayoub Hajlaoui

L'indétermination dérangeant nos calculs
à cette solution lestement nous accule.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$

Correction :

Bon, forme indéterminée, bien évidemment... Ce serait trop beau. Que faire ? Peut-être un développement limité ? Mais ces quantités qui tendent vers 0 *au dénominateur...*

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$.

• Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a, d'une part : $\boxed{x^2\sin^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4}$, par produit d'équivalents.

Il nous suffira donc d'un développement limité à l'ordre 4 du numérateur pour trouver la limite en 0 *de ce quotient...*

• D'autre part : $x^2 - \sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \left(x^2 - \dfrac{2x^4}{3!} + o(x^4)\right)$

Un développement à l'ordre 1 *ou* 2 *de sin en* 0 *ne suffisait pas ici pour atteindre une précision à l'ordre* x^4.
Pour le calcul, on a tout simplement développé le carré en mettant dans le $o(x^4)$ *tous les termes négligeables devant* x^4 *lorsque* x *tend vers* 0.
(Plus précisément : $\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \dfrac{x^6}{36} + \left(o(x^3)\right)^2 - \dfrac{2x^4}{6} + 2xo(x^3) - 2\dfrac{x^3}{6}o(x^3)$
$= x^2 + \dfrac{x^6}{36} + o(x^6) - \dfrac{x^4}{3} + o(x^4) - o(x^6)$ $\quad o(x^4)$ *et* $2o(x^4)$*, c'est pareil.. De même,* $-\dfrac{1}{3}o(x^6)$ *et* $o(x^6)$
$= x^2 - \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$ $\quad$ *car* $x^6 \underset{x\to 0}{=} o(x^4)$
Soit dit en passant - même si ça ne sert pas ici - attention à ne jamais écrire une bêtise du genre $o(x^6) - o(x^6) = 0$*... Non.* $o(x^6) - o(x^6)$*, c'est encore* $o(x^6)$*. La seule chose que nous puissions dire d'une différence de deux quantités négligeables devant* x^6*, c'est qu'elle est elle-même négligeable devant* x^6*. Nous ne pouvons certainement pas en conclure qu'elle est nulle.)*

On a donc : $x^2 - \sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{2}{3!}x^4 + o(x^4) = \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$. Donc $\boxed{x^2 - \sin^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}x^4}$

Par quotient d'équivalents : $\dfrac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \dfrac{1}{3}$. Finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}}$

Rappelons, à toutes fins utiles, que pour $l \neq 0$*, « $f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$ » veut dire « $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ »*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com