Intégrales et majoration

Ayoub Hajlaoui

L'on peut être présent sans que cela se voie.
L'invisible quotient fait entendre sa voix.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *D'après Mines-Ponts PC 2008*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose que f' ne s'annule pas sur $[a\,;b]$ et que pour tout $t \in [a\,;b]$, $f''(t) \geq 0$

1) Justifier qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $t \in [a\,;b]$, $|f'(t)| \geq K$

2) Montrer l'inégalité suivante : $\left| \displaystyle\int_a^b \frac{f''(t)}{\big(f'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{2}{K}$

3) Établir l'inégalité suivante : $\left| \displaystyle\int_a^b \cos\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{4}{K}$

Correction :

1) f' est continue sur $\mathbb{R}$ (car f de classe $\mathcal{C}^2$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). Et la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition, $|f'|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
A fortiori, $|f'|$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a\,;b]$, donc elle est bornée sur $[a\,;b]$ et atteint ses bornes. Soit K le minimum de $|f'|$ sur $[a\,;b]$.
$K \geq 0$ car $|f'|$ est positive. Et $K \neq 0$ car f' ne s'annule pas sur $[a\,;b]$, par hypothèse.
Donc $K > 0$. Et, par définition du minimum : $\forall t \in [a\,;b]$, $|f'(t)| \geq K$.

$\boxed{\text{D'où l'existence de } K > 0 \text{ tel que pour tout } t \in [a\,;b],\ |f'(t)| \geq K}$

2) $t \mapsto \dfrac{f''(t)}{\big(f'(t)\big)^2}$ est continue sur $[a\,;b]$ par continuité de f'' et f' (f étant $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$), et parce que f' ne s'annule pas sur $[a\,;b]$.

Remarquons que sur $[a\,;b]$, une primitive de $\dfrac{f''}{(f')^2}$ est $-\dfrac{1}{f'}$

D'où : $\left| \displaystyle\int_a^b \frac{f''(t)}{\big(f'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \right| = \left| \left[-\frac{1}{f'(t)} \right]_a^b \right| = \left| \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)} \right| \leq \left| \frac{1}{f'(a)} \right| + \left| \frac{1}{f'(b)} \right|$ (inégalité triangulaire)

Pour pouvoir utiliser l'hypothèse de minoration de $|f'|$*...*

Or, $|f'(a)| \geq K$ et $|f'(b)| \geq K$.
Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\left| \dfrac{1}{f'(a)} \right| + \left| \dfrac{1}{f'(b)} \right| \leq \dfrac{1}{K} + \dfrac{1}{K}$

On a donc bien montré : $\boxed{\left| \displaystyle\int_a^b \frac{f''(t)}{\big(f'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{2}{K}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

3) *Une question saine à se poser, c'est comment faire apparaître ce* K *dans la majoration.* K*, qui est intimement lié à* f'*. Or, nulle trace de* f' *(pour l'instant) sous l'intégrale ...*
Mais avec un peu d'imagination, on peut justement faire apparaître du $f'(t)$ *en produit sous l'intégrale (tiens tiens tiens, ça fait du* $f'(t)\cos\left(f(t)\right)$*, et on sait primitiver ça !), en compensant bien sûr avec* $\dfrac{1}{f'(t)}$*...*

$t \mapsto \cos\left(f(t)\right)$ est continue sur $[a\,;b]$ par composée de f continue sur $[a\,;b]$ et $\cos$ continue sur $\mathbb{R}$.

$$\left|\int_a^b \cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b \frac{1}{f'(t)} \times f'(t)\cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right|$$

$u : t \mapsto \dfrac{1}{f'(t)}$ et $v : t \mapsto \sin\left(f(t)\right)$ sont de classe C^1 sur $[a\,;b]$ (f étant C^2 sur $[a\,;b]$)

$u' : t \mapsto -\dfrac{f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2}$ et $v' : t \mapsto f'(t)\cos\left(f(t)\right)$

$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f'(t)} \times f'(t)\cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties fournit donc :

$$\int_a^b \cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin\left(f(t)\right)}{f'(t)}\right]_a^b + \int_a^b \frac{f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2}\sin\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

Tiens tiens tiens, la dernière intégrale me dit quelque chose...

Donc $\displaystyle\left|\int_a^b \cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{\sin\left(f(b)\right)}{f'(b)} - \frac{\sin\left(f(a)\right)}{f'(a)} + \int_a^b \frac{f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2}\sin\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right|$. D'où :

$$\left|\int_a^b \cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\frac{\sin\left(f(b)\right)}{f'(b)}\right| + \left|\frac{\sin\left(f(a)\right)}{f'(a)}\right| + \left|\int_a^b \frac{f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2}\sin\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right|$$

(d'après l'inégalité triangulaire, pas celle pour les intégrales cette fois-ci, la « classique »...)

D'où : $\displaystyle\left|\int_a^b \cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{2}{K}$ (d'après 1. et car $|\sin| \leq 1$)

Par hypothèse de l'énoncé, $|f'(a)| \geq K$ et $|f'(b)| \geq K$ donc :

par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{|f'(a)|} \leq \dfrac{1}{K}$ et $\dfrac{1}{|f'(b)|} \leq \dfrac{1}{K}$

Finalement : $\boxed{\displaystyle\left|\int_a^b \cos\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{4}{K}}$