Riemann et Euler

Ayoub Hajlaoui

Alpha gamma zeta, des lettres en salade,
un morceau de feta : savoureuse escalade.

Énoncé : (temps conseillé : 2 h 15 min)

On rappelle : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

a) Déterminer le domaine de convergence simple D de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$. On notera ζ sa fonction somme, définie sur D par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

b) Montrer que pour tout $a > 1$, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a\ ;+\infty[$

c) Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $]1\ ;+\infty[$

2) Étudier la continuité puis la dérivabilité de ζ sur $]1\ ;+\infty[$

3) Montrer que pour tout $x > 1$, $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$

4) Déterminer les limites de ζ en $+\infty$ et à droite en 1.

5) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions g_n et h_n sur $[1\ ;+\infty[$ par $g_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt$ et $h_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$.

Enfin, pour tout $x > 1$, soit ϕ_x la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $\phi_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$

a) Pour tout $x > 1$, étudier les variations de ϕ_x

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, pour tout $x \in [1\ ;+\infty[$, $h_n(x) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ est normalement convergente sur $[1\ ;+\infty[$

6) Démontrer que : $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \gamma$

Correction :

1)a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$. Autrement dit, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge si et seulement si $x > 1$.

Le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est donc : $\boxed{D =]1\ ;+\infty[.}$

1)b) Pour tout $a > 1$, $[a\,;+\infty[\, \subset D$.

Pour tout entier naturel non nul n, pour tout $x \in [a\,;+\infty[$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{\exp\big(x\ln(n)\big)}$

$x \geq a$ et $\ln(n) \geq 0$ (car $n \geq 1$). Donc $x\ln(n) \geq a\ln(n)$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, puis par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{1}{n^a}$

On a donc montré : $\forall x \in [a\,;+\infty[$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^a}$. (et $\dfrac{1}{n^a}$ ne dépend pas de x)

$a > 1$ donc la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ est convergente. Nous pouvons en conclure que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$.

En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } a > 1,\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur } [a\,;+\infty[}$

1)c) *La logique de l'énoncé voudrait que cette série de fonctions ne converge pas uniformément sur $]1\,;+\infty[$. En effet, si elle convergeait uniformément sur $]1\,;+\infty[$, pour tout $a > 1$, elle convergerait uniformément sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$, inclus dans $]1\,;+\infty[$. Ce qui rendrait la question 1)b) obsolète (même si, bien entendu, nous ne sommes pas à l'abri d'un énoncé qui irait du particulier pour généraliser ensuite).*

Soit (R_n) la suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\,]1\,;+\infty[$, $R_n(x) = \zeta(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$

Montrons que (R_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]1\,;+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in\,]1\,;+\infty[$, $\Big|R_n(x)\Big| = \Big|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}\Big| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x}$

car la série est à termes positifs.

Cette minoration de la somme infinie par une somme finie, dont on saura minorer chaque terme par, par exemple, le plus petit terme de la somme, est classique. Dans notre cas, cette somme finie pour k allant de $n+1$ à $2n$ comporte n termes, ce qui nous permettra de profiter de l'apparition d'un n au numérateur après minoration.

Or, pour tout $k \in [\![n;2n]\!]$, pour tout $x \in\,]1\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{k^x} = \dfrac{1}{\exp\big(x\ln(k)\big)} \geq \dfrac{1}{\exp\big(x\ln(2n)\big)} = \dfrac{1}{(2n)^x}$

où l'on a utilisé la croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in\,]1\,;+\infty[$: $\Big|R_n(x)\Big| \geq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(2n)^x} = \frac{n}{(2n)^x} = \frac{1}{2^x n^{x-1}}$

Nous avons donc montré : $\forall \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in\,]1\,;+\infty[$, $\Big|R_n(x)\Big| \geq \dfrac{1}{2^x \exp\big((x-1)\ln(n)\big)}$

Reste à trouver une suite (x_n) d'éléments de $]1\,;+\infty[$ qui mettrait en échec la convergence uniforme de (R_n) vers la fonction nulle sur $]1\,;+\infty[$...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

D'après l'inégalité précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x_n)| \geq \dfrac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} \exp\big(\frac{\ln(n)}{n}\big)}$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big) = e^0 = 1$ par continuité de la fonction exponentielle en 0.

Et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \exp\Big(\big(1+\tfrac{1}{n}\big)\ln(2)\Big) = 2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sup\limits_{x\in]1\ ;+\infty[} |R_n(x)| \geq |R_n(x_n)| \geq \dfrac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}$

On ne peut donc pas avoir : $\sup\limits_{x\in]1\ ;+\infty[} |R_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

En conclusion, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1\ ;+\infty[}$

2) Pour tout $a > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[1\ ;+\infty[$ (car $h_n(x) = \dfrac{1}{\exp\left(x\ln(n)\right)}$)

De plus, d'après 1)b), pour tout $a > 1$, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a\ ;+\infty[$

Le théorème de continuité des séries de fonctions nous permet de conclure que la fonction somme ζ est donc continue sur $[a\ ;+\infty[$. Cela étant vrai pour tout $a > 1$, nous en déduisons que $\boxed{\zeta \text{ est continue sur }]1\ ;+\infty[}$

En effet, $\bigcup\limits_{a>1} [a\ ;+\infty[=]1\ ;+\infty[$.

Autre manière de dire les choses : du fait que, pour tout $a > 1$, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge uniformément sur* $[a\ ;+\infty[$, *nous aurions pu conclure que* $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* $]1\ ;+\infty[$, *et donc que la fonction somme* ζ *est continue sur* $]1\ ;+\infty[$.

Étudions maintenant la dérivabilité de ζ sur $]1\ ;+\infty[$. Pour tout $a > 1$:

- la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement (car converge uniformément) sur $[a\ ;+\infty[$

En fait, la convergence, pour un réel x_0 *de l'intervalle concerné, de* $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x_0)$ *suffit.*

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $[a\ ;+\infty[$ et, pour tout $x \in [a\ ;+\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{1}{\exp\left(x\ln(n)\right)}$

$= \exp\left(-x\ln(n)\right)$ donc $f_n'(x) = -\ln(n) \times \exp\left(-x\ln(n)\right) = -\dfrac{\ln(n)}{n^x}$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [a\ ;+\infty[$, $|f_n'(x)| = \dfrac{\ln(n)}{n^x} \leq \dfrac{\ln(n)}{n^a}$ (qui ne dépend plus de x)

Reste à montrer que la série de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n^a}$ *converge, en comparant, par exemple, ce terme général à celui d'une série de Riemann convergente..*

Essayons donc d'écrire $\dfrac{\ln(n)}{n^a}$ *comme un petit* o *de* $\dfrac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha > 1$

Pour ce faire, écrivons $\ln(n)$ *comme un petit* o *d'une puissance (strictement positive) de* n *qui nous arrange, c'est-à-dire justement qui nous permette d'écrire* $\dfrac{\ln(n)}{n^a}$ *comme un petit* o *de* $\dfrac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha > 1$

$\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\frac{a-1}{2}}\right)$ (car $\dfrac{a-1}{2} > 0$ et par croissance comparée)

Donc $\dfrac{\ln(n)}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\frac{a-1}{2}} \times \dfrac{1}{n^a}\right)$. Autrement dit : $\dfrac{\ln(n)}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right)$

Or, $\dfrac{a+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$. Donc $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ est une série de Riemann convergente.

Et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n^a}$ converge.

Nous avons donc prouvé la convergence normale, et donc uniforme, de $\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $[a\,;+\infty[$

Donc d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, ζ est dérivable sur $[a\,;+\infty[$, et pour tout $x \in [a\,;+\infty[$, $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^x}$

Cela étant vrai pour tout $a > 1$, nous pouvons en conclure que $\boxed{\zeta \text{ est dérivable sur }]1\,;+\infty[}$ et que, pour tout $x \in [a\,;+\infty[$, $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^x}$

De même que pour la continuité, nous aurions aussi pu utiliser la version locale du théorème de dérivation des séries de fonctions.

3) Pour tout $x > 1$, $\zeta(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1^x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Et c'est ce terme qu'il faudrait encadrer... Dans ce genre de situation, des comparaisons avec des intégrales peuvent s'avérer utiles.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$. En effet, $\frac{1}{t^x} = \exp\big(-x\ln(t)\big)$

Donc, pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $x \in [n\,;n+1]$, $\frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$.

D'où, par croissance de l'intégrale : $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire : $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^x}$

De même, pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $x \in [n-1\,;n]$, $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{t^x}$, d'où : $\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{n^x}$

Donc, pour tout $n \geq 2$: $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$

Pour tout entier $N \geq 2$ (en sommant ces inégalités pour n allant de 2 à N), on obtient :
$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$. Puis, en utilisant la relation de Chasles :
$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{N} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$. *Et nous sommes en mesure de calculer ces intégrales...*
$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \int_2^{N+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_2^{N+1}$ car $x \neq 1$ (donc $-x \neq -1$)
Attention, on primitive par rapport à t et pas x...

Donc $\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{(N+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{2^{1-x}}{1-x} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}}$

De même : $\int_1^{N} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)N^{x-1}}$

On a donc montré : $\forall N \geq 2$, $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)N^{x-1}}$

Comme $x > 1$ (donc $x - 1 > 0$), en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :
$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1}$

Nous avons bien montré que $\boxed{\text{pour tout } x > 1,\ \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}}$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = 0$.

Donc d'après 3), et d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) - 1 = 0$.

Autrement dit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1}$

Et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{(x-1)\exp\big((x-1)\ln(2)\big)} = +\infty$. Donc d'après 3) et par théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to1^+} \zeta(x) - 1 = +\infty$. D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+1^+} \zeta(x) = +\infty}$

5)a) Soit $x > 1$. ϕ_x est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de telles fonctions.

Pour tout $t \in\ ]0\,;+\infty[$, $\phi_x'(t) = \dfrac{\frac{1}{t}\times t^x - \ln(t)\times xt^{x-1}}{t^{2x}} = \dfrac{t^{x-1}\big(1 - x\ln(t)\big)}{t^{2x}} = \dfrac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$

Or, pour tout $t > 0$, $t^{x+1} > 0$, donc $\phi_x'(t)$ est du signe de $1 - x\ln(t)$

$\forall t > 0 : \phi_x'(t) \geq 0 \iff 1 - x\ln(t) \geq 0 \iff \ln(t) \leq \dfrac{1}{x}$ (car $x > 0$) $\iff t \leq e^{\frac{1}{x}}$ (par croissance de exp sur $\mathbb{R}$).

On peut donc établir le tableau de variation de ϕ_x : $\quad \left(\phi_x\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{e} = \dfrac{1}{xe}\right)$

x	0	$\exp\left(\frac{1}{x}\right)$	$+\infty$
ϕ_x	‖ ↗	$\frac{1}{xe}$	↘

5)b) Pour tout $n \geq 3$, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $h_n(x) = \exp\big(-x\ln(n)\big) - \exp\big(-x\ln(n+1)\big)$
h_n est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$:
$h_n'(x) = -\ln(n)\exp\big[-x\ln(n)\big] + \ln(n+1)\exp\big[-x\ln(n+1)\big] = -\dfrac{\ln(n)}{n^x} + \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}$.
Tiens, ça ne vous fait penser à rien ?
Donc : pour tout $n \geq 3$, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $h_n'(x) = -\phi_x(n) + \phi_x(n+1) = \phi_x(n+1) - \phi_x(n)$
Et c'est le signe de $h_n'(x)$ qu'il nous faut...

D'après le tableau de variations de ϕ_x (cf 5a), ϕ_x est décroissante sur $\left[\exp\left(\frac{1}{x}\right)\,;+\infty\right[$.
Or, pour $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x} \leq 1$ et donc $\exp\left(\frac{1}{x}\right) \leq e$ (par croissance de exp sur $\mathbb{R}$)
Et, pour $n \geq 3$, $\ n > e \geq \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc ϕ_x est décroissante sur $[n\,;n+1]$
En particulier, $\phi_x(n+1) - \phi_x(n) \leq 0$. Autrement dit : $h_n'(x) \leq 0$ (et ce pour tout $x \geq 1$)

h_n est donc décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
Donc : $\forall\,[1\,;+\infty[\,,\ h_n(x) \leq h_n(1) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Nous avons donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \geq 3, \text{ pour tout } x \in [1\,;+\infty[,\ h_n(x) \leq \dfrac{1}{n(n+1)}}$

5)c) $\sum\limits_{n\geq1} g_n$ *? Vous êtes sûrs ? Vous ne voulez pas plutôt dire* $\sum\limits_{n\geq1} h_n$ *? Parce que si c'étaient les h_n, la 5)b)... Bon d'accord, va pour les g_n. Discuter avec un sujet, quel dialogue de sourds.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $g_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$
Il y a clairement moyen de faire un lien avec $h_n(x)$...

Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\,\mathrm{d}t$

D'où : $\displaystyle\frac{1}{n^x} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(n+1)^x}$

Donc $\displaystyle -\frac{1}{n^x} \leq -\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq -\frac{1}{(n+1)^x}$ et finalement : $\displaystyle 0 \leq \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$

D'où : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $0 \leq g_n(x) \leq h_n(x)$ *Aha !*

Donc d'après 5)b) : pour tout $n \geq 3$, pour tout $x \geq 1$, $\displaystyle |g_n(x)| \leq h_n(x) \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

On fait attention à la précision $n \geq 3$, hypothèse de 5b)

$\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (cf série de Riemann avec $2 > 1$), avec $\dfrac{1}{n^2}$ ne dépendant pas de x

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 3} g_n$ est donc normalement convergente sur $[1\,;+\infty[$.

Nous pouvons en déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ est normalement convergente sur $[1\,;+\infty[$.

6) *Quel rapport avec tout ce qui précède ? Exprimons tout simplement, pour y voir plus clair, $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$, pour $x > 1$*

Pour tout $x > 1$: $\displaystyle\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{x-1}$ *Mouais...*

Si on n'a pas vu que $\dfrac{1}{x-1}$ pouvait s'écrire comme une intégrale (cf 3), essayons d'exprimer la somme de la série de fonctions traitée en 5)b), pour voir ?

Pour tout $x > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$ par convergence de la série (cf Riemann avec $x > 1$) et de l'intégrale obtenue (cf Riemann) avec la relation de Chasles.

Donc (après calcul simple de l'intégrale, comme en 3) :

pour tout $x > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$. *AH !*

Déterminer (si elle existe) la limite en 1 à droite de $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$ revient donc à déterminer la limite en 1 à droite de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$. *Des considérations de continuité s'imposent...*

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ est normalement - donc uniformément - convergente sur $[1\,;+\infty[$.

Et pour tout $n \geq 1$, g_n est continue sur $[1\,;+\infty[$.

En effet : $\forall n \geq 1, \forall x \in [1\,;+\infty[$, $\displaystyle g_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$, avec $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ continue sur $[1\,;+\infty[$,

et $\displaystyle x \mapsto \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{x-1}\Big(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\Big)$ continue sur $[1\,;+\infty[$.

Même si c'était inutile ici vu qu'on sait calculer l'intégrale, on aurait pu utiliser un théorème de continuité des intégrales à paramètres pour la continuité de $\displaystyle x \mapsto \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$

Donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est continue sur $[1\,;+\infty[$.

En particulier, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est continue (à droite) en 1.

Donc $\lim_{x\to 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)$

Cette fois-ci, ATTENTION, surtout, à ne pas séparer la somme de la série et l'intégrale, toutes deux divergentes... Mais alors, que faire ?

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)$ *Et pour* N *fixé, on va pouvoir séparer...*

Pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \int_1^{N+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) + \ln(N) - \ln(N+1)$

Il s'agissait ici de faire apparaître $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N)$ *dont nous savons quelque chose d'intéressant, en lien justement avec* γ *(cf rappel de l'énoncé)*

Donc, pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) - \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)$

Or : $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) = \gamma$ (car d'après l'énoncé, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)$)

Et $\lim_{N\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) = 0$

D'où : $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \gamma$. Autrement dit : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \gamma$

Nous avons donc montré : $\lim_{x\to 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(1) = \gamma$

Et comme on a, pour tout $x > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$, nous pouvons conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \gamma}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com