# Suite d'intégrales et série

Ayoub Hajlaoui

*Le crayon à la main, assis au fond du bus,*
*je veux un signe moins à la place du plus.*

**Énoncé :** (temps conseillé : 25 min)

Soit $(I_n)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de $n$.

3) Démontrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et calculer sa somme.

**Correction :**

1) *S'agit-il de calculer directement l'intégrale en fonction de $n$ ? S'il s'agissait de la calculer, la question 2 deviendrait franchement niaise... Mais si on ne sait pas la calculer, et que l'on veut quand même la limite ? Les inégalités sont nos amies.*

Pour tout entier naturel $n$, pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$

Donc, par croissance de l'intégrale, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

Autrement dit : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

2) Pour tout entier naturel $n$, $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Donc $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$

Nous avons donc montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}}$

3) *Euh. Quel rapport avec ce qui précède ? Mis à part le $\dfrac{1}{n}$ dans la somme et le $\dfrac{1}{n+1}$ que nous venons d'obtenir...*

Le résultat obtenu en 2) s'écrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{n}$
*En effet, nous avons appliqué l'égalité précédente, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, en remplaçant $n$ par $n-1$. Mais pour qu'elle soit valable pour $n-1$, justement, il faut : $n-1 \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $n \in \mathbb{N}^*$*
*Nous pouvons maintenant nous servir de cette égalité pour remplacer le $\dfrac{1}{n}$ dans le terme général de la série...*

Dès lors, pour tout $N \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \times \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \times \left(I_{n-1} + I_n\right)$

*Remarquez que nous nous en sommes servis dans une somme partielle. Nous n'avons pas manipulé la somme infinie, car nous n'avons pas démontré la convergence de la série... Mais que faire de ce que nous venons d'obtenir ? Nous aimerions voir un télescopage, mais ce* $(-1)^{n+1}$*... Et surtout, ce signe +...*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n+1} \times \left(I_{n-1} + I_n\right) = (-1)^{n-1} \times \left(I_{n-1} + I_n\right) = (-1)^{n-1} I_{n-1} + (-1)^{n-1} I_n$

*En effet,* $(-1)^{n+1} = (-1)^2(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$*. Ou, dit autrement,* $n+1$ *et* $n-1$ *ont même parité.*

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n+1} \times \left(I_{n-1} + I_n\right) = (-1)^{n-1} I_{n-1} - (-1)^n I_n$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n I_n$, on a donc : $\forall N \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} (a_{n-1} - a_n)$

*La voie est enfin libre pour notre télescopage...*

D'où : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = a_{1-1} - a_N = a_0 - a_N = (-1)^0 I_0 - (-1)^N I_N = I_0 - (-1)^N I_N$

Or, d'après 1 : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} I_N = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} |(-1)^N I_N| = \lim_{N \to +\infty} |I_N| = \lim_{N \to +\infty} I_N = 0$

$\left(I_N \geq 0 \text{ par positivité de } x \mapsto \dfrac{x^N}{1+x} \text{ sur } [0\,;1]\right)$

Donc : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln(2)$

Cela prouve que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge}}$, et que sa somme vaut $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$