Déterminer un déterminant

Ayoub Hajlaoui

Quels laids coefficients débordant de racines !
Usons à bon escient des voies qui se dessinent.

Énoncé : (temps conseillé : 5 min)

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \sqrt{3}+1 & \dfrac{\sqrt{3}}{2}-2 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3}+1 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2 & 1-\sqrt{3} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 (oui, désolé...)
2) On admet que A est inversible. Déterminer $\det(A)$

Correction :

1) *Après quelques calculs dont l'énumération serait, pour paraphraser les Inconnus, inutile et fastidieuse :*

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & -3-3\sqrt{3} & 6-3\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 3\sqrt{3}-3 & -3 & -3-3\sqrt{3} \\ 6+3\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 3\sqrt{3}-3 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \sqrt{3}-1 & 2+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3}-1 & -1 & \sqrt{3}-1 \\ 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}-1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On remarque : $\boxed{A^2 = -\,{}^tA}$ *où* ${}^tA$ *est la transposée de* A

2) *Il s'agit bien évidemment d'utiliser la question 1 (à moins d'aimer se faire mal).*

D'après 1), $\det(A^2) = \det(-\,{}^tA)$. Or, d'une part, $\det(A^2) = \big(\det(A)\big)^2$ et, d'autre part,
$\det(-\,{}^tA) = (-1)^3\det(A)$ (A matrice carrée de taille 3)
Donc : $\big(\det(A)\big)^2 = -\det(A)$. Autrement dit, $\big(\det(A)\big)^2 + \det(A) = 0$.
D'où : $\det(A)\big(\det(A)+1\big) = 0$.

Or, par hypothèse, A est inversible. Donc $\det(A) \neq 0$.
D'où : $\det(A) + 1 = 0$. Finalement, $\boxed{\det(A) = -1.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com