Famille « assez proche »de la base canonique

Ayoub Hajlaoui

Campant dans un marais sous une sombre averse,
notre base est trop près de cent canons adverses.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et soit $(f_1, ..., f_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que : $\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ ||f_k - e_k|| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(f_1, ..., f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Correction :

C'est dans les vieux pots que l'on fait la meilleure confiture...

Soient n réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. Montrons que ces réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont tous nuls.

Mais par où commencer ? Il serait bon de nous mettre dans une situation qui nous permettrait d'utiliser cette information de l'énoncé sur les normes des $e_k - f_k$...

Nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

Autrement dit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f_k - e_k) = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \quad (*)$

Or, $\displaystyle||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f_k - e_k)|| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\ ||f_k - e_k||$ d'après l'inégalité triangulaire et par homogénéité de la norme

Et, en utilisant l'information de l'énoncé : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\ ||f_k - e_k|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$

Mais pourquoi « $\leq$ »et pas « $<$ » ? Parce que pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $||e_k - f_k|| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, oui, et en multipliant par $|\lambda_k|$ positif <u>ou nul</u>, $|\lambda_k|\ ||f_k - e_k|| \leq |\lambda_k| \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Par transitivité, nous avons donc montré : $\displaystyle||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f_k - e_k)|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$

Autrement dit, d'après (*) : $\displaystyle||-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, ou encore : $\displaystyle||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$

Mais ça tombe bien, ça ! Nous savons exprimer $\displaystyle||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k||$ en fonction des λ_k...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Or : $|| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}$. Nous avons donc : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$.

Puis, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right)^2$

Ça sent Cauchy-Schwarz à plein nez...

L'inégalité de Cauchy Schwarz appliquée aux vecteurs $(|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|)$ et $(1, ..., 1)$ fournit :

$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \times 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}$ *Rappelons qu'elle stipule :* $(u, v) \leq ||u||\ ||v||$

D'où : $\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \sum_{k=1}^{n} 1$, c'est-à-dire : $\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

Mais nous avions montré précédemment : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right)^2$, c'est-à-dire :

$n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right)^2$

Par double inégalité, nous obtenons donc : $\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right)^2 = n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

Nous nous retrouvons donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz...

Les vecteurs $(|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|)$ et $(1, ..., 1)$ (à qui nous l'avions appliquée) sont donc colinéaires.

Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$

Il suffit maintenant de montrer que $\lambda = 0$ *et le tour est joué.*

L'égalité de départ $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ s'écrit alors : $\lambda \sum_{k=1}^{n} f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. Montrons que $\sum_{k=1}^{n} f_k \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

Pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $||f_k - e_k|| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Et $|| \sum_{k=1}^{n} f_k - e_k|| \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_k - e_k|| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Donc : $|| \sum_{k=1}^{n} f_k - e_k|| < \sqrt{n}$

Supposons par l'absurde que $\sum_{k=1}^{n} f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$.

On aurait alors : $|| \sum_{k=1}^{n} f_k - e_k|| = || \sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{n} e_k|| = ||0_{\mathbb{R}^n} - \sum_{k=1}^{n} e_k|| = || \sum_{k=1}^{n} e_k|| = \sqrt{n}$

Cela nous fait aboutir à : $\sqrt{n} < \sqrt{n}$, et c'est absurde.

Nous pouvons donc en conclure qu'en fait, $\sum_{k=1}^{n} f_k \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

L'égalité $\lambda \sum_{k=1}^{n} f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ donne donc : $\lambda = 0$. Finalement, nous obtenons : $\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!], \lambda_k = \lambda = 0$

La famille $(f_1, ..., f_n)$ est donc libre. De plus, son cardinal, n, est égal à la dimension de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{En conclusion, } (f_1, ..., f_n) \text{ est bien une base de } \mathbb{R}^n}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com