Divergence de la série harmonique

Ayoub Hajlaoui

De plus en plus petits et tendant vers zéro,
mais les sommer nous donne un sacré numéro.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

1) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}$

2) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln(N+1)$

3) Déterminer : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

Correction :

1) *Doit-on calculer l'intégrale du membre de gauche, vu que l'on sait le faire ? Pas nécessairement. Cela ferait apparaître du ln, et on serait loin d'avoir montré l'inégalité demandée (même si ce serait possible avec une étude de fonction...). Mais alors, que faire ?*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc a fortiori sur $[n\ ;\ n+1]$.

D'où : $\forall t \in [n\ ;\ n+1],\ \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{n}$.

Donc, par croissance de l'intégrale sur $[n\ ;\ n+1]$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, \mathrm{d}t$

À droite, on intègre une constante sur $[n\ ;\ n+1]$*...*

Par suite, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \left[\frac{t}{n}\right]_n^{n+1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} = \frac{1}{n}$

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}}$

2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On sait d'après 1) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}$

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq b_n$, *alors évidemment,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$*...*

Donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ *(Mais* $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$, *c'est* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t + \int_2^3 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t + \ldots + \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$*)*

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \int_1^{N+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$. Donc : $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Et là, on peut faire intervenir le ln voulu par l'énoncé...

Et $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \big[\ln(t)\big]_1^{N+1} = \ln(N+1) - \ln(1) = \ln(N+1)$.

Finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln(N+1)}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

3) *On nous demande de démontrer une inégalité, puis on nous demande un calcul de limite...*

$\lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) = +\infty$ donc, d'après 2) et par théorème de comparaison : $\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty}$

Et oui, tout simplement...
On dit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge vers* $+\infty$.

Intéressant, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *et pourtant* $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$...