Du x sur une borne

Ayoub Hajlaoui

Perché sur l'intégrale et surplombant le t
le x contre-amiral contemple la jetée.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *D'après EDHEC 2018 ECE*

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\, dt$.

1) a) Justifier que $f(x)$ est bien défini pour tout réel x.
   b) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
   c) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est continue sur $\mathbb{R}$ (on dit alors que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$). Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   d) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2}$
   b) En déduire que pour tout réel x, on a :
   $f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$

Correction :

1)a) La fonction $g \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par composée de $t \mapsto 1+t^2$ continue sur $\mathbb{R}$ et à image dans $\mathbb{R}_+^*$, et de $\ln$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$).
Donc, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, g est continue sur $[0\ ;\ x]$, et $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\, dt$ est bien défini. Et, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_-$, g est continue sur $[x\ ;\ 0]$, et $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\, dt$ $= -\displaystyle\int_x^0 \ln\left(1+t^2\right)\, dt$ est bien défini. $\boxed{f(x) \text{ est donc bien défini pour tout réel } x}$.

1)b) *Il serait judicieux de s'intéresser au signe de la fonction sous l'intégrale...*

La fonction g définie (en 1)a)) sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \ln(1+t^2)$ est positive sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout réel t, $1+t^2 \geq 1$, et, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+t^2) \geq \ln(1) = 0$.

Mais attention, pour avoir le signe de $f(x)$, il faut distinguer les cas suivant x...
Pour tout $x \geq 0$, on a donc, par croissance de l'intégrale sur $[0\ ;\ x]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt \geq 0$.

Et, pour tout $x < 0$, par croissance de l'intégrale sur $[x\ ;\ 0]$, $\displaystyle\int_x^0 g(t)\, dt \geq 0$ donc

$f(x) = -\displaystyle\int_x^0 g(t)\, dt \leq 0$. $\boxed{f(x) \text{ est donc négatif pour } x \in\,]-\infty\ ;\ 0] \text{ et positif pour } x \in\ [0\ ;\ +\infty[}$
(et $f(0) = 0$)

1)c) *Revenons tout simplement à la définition d'intégrale sur un segment...*

g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \big[G(t)\big]_0^x$ $= G(x) - G(0)$, avec G dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$.

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R},\ f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ (par continuité de g) et, pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = G'(x) = g(x) = \ln(1+x^2)}$

Attention à ne pas écrire d'horreur du genre $f'(x) = G'(x) - G'(0)$*...* $G(0)$ *est une constante !*

1)d) Nous avons montré en 1)b) que g était positive sur $\mathbb{R}$. Or, d'après 1)c), $f' = g$. $\boxed{\text{Donc } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

2)a) Pour tous réels a et b, pour tout t réel, $a + \dfrac{b}{1+t^2} = \dfrac{a + at^2 + b}{1+t^2} = \dfrac{at^2 + a + b}{1+t^2}$

On veut donc deux réels a *et* b *tels que pour tout réel* t, $at^2 + a + b = t^2$*...*

En prenant $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1}$ (de telle sorte que $a + b = 0$), on a bien le résultat voulu.

Autrement dit, on a montré : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}}$

2)b) *Partir d'une intégrale pour obtenir ce que veut l'énoncé. Ça sent l'IPP à plein nez...*

Pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \ln(1+t^2) \times 1\,\mathrm{d}t$

Et oui, même avec un seul terme en apparence, on peut faire apparaître un produit trivial. Et maintenant, pour l'IPP, on n'a pas trop le choix de qui dériver et qui primitiver.. (Je ne sais pas vous, mais moi, je ne sais pas primitiver $t \mapsto \ln(1+t^2)$ *)*

En posant $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v(t) = t$, u et v sont dérivables, de dérivées continues sur $\mathbb{R}$.

Il suffit que cela soit vrai sur le segment d'intégration, mais je ne voulais pas m'embarrasser à parler de $[0\ ;\ x]$ *et* $[x\ ;\ 0]$ *en fonction du signe de* x*...*

Pour tout réel t, $u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $v'(t) = 1$

Et, pour tout réel x : $f(x) = \displaystyle\int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties fournit :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \big[u(t)v(t)\big]_0^x - \displaystyle\int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \big[t\ln(1+t^2)\big]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} \times t\,\mathrm{d}t$

$= x\ln(1+x^2) - 0 - 2\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *Ah mais ce* $\dfrac{t^2}{1+t^2}$ *me dit quelque chose...*

Donc d'après 2)a) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\displaystyle\int_0^x \Big(1 - \frac{1}{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t$

Par linéarité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

$= x\ln(1+x^2) - 2\big[t\big]_0^x + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\big(\ln(1+x^2) - 2\big) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}$

Et, à moins d'être dans une voie commerciale pour laquelle les fonctions trigonométriques ne sont pas au programme, vous savez (ou saurez) calculer la dernière intégrale...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com