Limites et convergence d'intégrale

Ayoub Hajlaoui

Mon gribouillage tient à ces signes qui l'ornent.
Intégrons je veux bien, mais attention aux bornes !

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 15 minutes) *d'après EDHEC ECS, mai 1996*

Soit F la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier que F est bien définie sur $]0\,;\,1[$.

2) Démontrer que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)$

b) En déduire les limites en 0 et en 1 de la fonction F.

4) Montrer que F est dérivable sur $]0\,;\,1[$ et que pour tout x de $]0\,;\,1[$, $F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

Indication : on pourra introduire une primitive G sur $]0\,;\,1[$ de $g : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$

5) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1-x} \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt$ est convergente.

Correction :

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0\,;\,1[$ (ln étant continue et ne s'annulant pas sur cet intervalle). Or, pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $[x^2\,;\,x] \subset]0\,;\,1[$.
Donc, en particulier, $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[x^2\,;\,x]$.
Pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ est donc bien défini.
Et de même pour $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
Autrement dit, $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est bien définie sur }]0\,;\,1[.}$

J'ai bien parlé de segment $[x^2\,;\,x]$, et pas $[x\,;\,x^2]$. En effet, pour $x \in]0\,;\,1[$, $x^2 < x$

2) On montre de même que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
On cherche une primitive sur $]0\,;\,1[$ de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$
Autrement, je ne vois pas trop comment vous pourriez obtenir une valeur exacte de cette intégrale.

Qu'est-ce qu'on a bien pu dériver pour obtenir un tel quotient ? Effectivement, dans ce cas, si vous continuez à penser quotient, vous ne risquez pas de voir... Mais c'est aussi un produit !

Pour tout $t \in]0\ ;\ 1[$: $\dfrac{1}{t\ln(t)} = \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{\ln(t)} = \ln'(t) \times \dfrac{1}{\ln(t)} = \dfrac{\ln'(t)}{\ln(t)}$

Une primitive sur $]0\ ;\ 1[$ de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est donc $t \mapsto \ln\big(|\ln(t)|\big)$

Rappelons en effet qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ *est* $\ln|u|$. *Sans oublier la valeur absolue !*

Donc, pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(|\ln(t)|\big)\Big]_x^{x^2} = \ln\big(|\ln(x^2)|\big) - \ln\big(|\ln(x)|\big)$

x et x^2 sont deux éléments de $]0\ ;\ 1[$.
D'où, par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(x) < \ln(1) = 0$ et $\ln(x^2) < 0$
$\ln(x)$ et $\ln(x^2)$ sont donc strictement négatifs.
On en déduit que $|\ln(x^2)| = -\ln(x^2)$ et $|\ln(x)| = -\ln(x)$

Il s'ensuit que : pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\big(-\ln(x^2)\big) - \ln\big(-\ln(x)\big)$

Et oui, vous aviez peut-être l'impression qu'on vous embête avec cette valeur absolue dans $\ln|u|$*, parce que souvent,* $u > 0$ *et la valeur absolue semble ne pas avoir trop d'intérêt. Tâchez donc de vous rappeler qu'il y a des cas comme celui-là...*

D'où : $\forall x \in]0\ ;\ 1[$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\Big(\frac{-\ln(x^2)}{-\ln(x)}\Big) = \ln\Big(\frac{\ln(x^2)}{\ln(x)}\Big)$

Ce n'est pas parce que a *et* b *ont ici une sale tête qu'il faut oublier le classique* $\ln(a) - \ln(b) = \ln\Big(\dfrac{a}{b}\Big)$

Donc : $\forall x \in]0\ ;\ 1[$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\Big(\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\Big)$ *on n'oublie pas non plus :* $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Finalement, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0\ ;\ 1[,\ \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$

Et le plus drôle, c'est qu'un élève inattentif à cette histoire de valeur absolue aurait obtenu la même chose ! Il n'aurait pas eu les signes moins au numérateur et au dénominateur du quotient $\dfrac{-\ln(x^2)}{-\ln(x)}$*, et serait arrivé au même résultat. Ah oui mais en maths, le cheminement nous intéresse au moins autant que le résultat ! Donc le fait qu'il ait écrit, pour* $0 < x < 1$ *(c'est-à-dire pour* $\ln(x) < 0$*), une horreur comme* $\ln\big(\ln(x^2)\big) - \ln\big(\ln(x)\big)$*, décrédibilise son raisonnement.*

3)a) *Le* $\ln(2)$ *à faire apparaître dans l'encadrement nous évoque bien évidemment l'intégrale que nous venons de calculer...*

D'après 2), pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $\displaystyle x^2\ln(2) = x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle x\ln(2) = x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

Or, pour tout $t \in [x^2\ ;\ x]$, $x^2 \leq t \leq x$

Donc, en multipliant par $\dfrac{1}{t\ln(t)}$ (négatif sur $]x^2\ ;\ x[\ \subset\ ]0\ ;\ 1[$) : $\dfrac{x^2}{t\ln(t)} \geq \dfrac{1}{\ln(t)} \geq \dfrac{x}{t\ln(t)}$

Puis, par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geq \int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

Attention, croissance de l'intégrale, oui, mais en prenant les bornes dans le sens croissant ! Une fois encore, n'oublions pas que $x^2 < x$

D'où, en multipliant par $-1 < 0$: $\displaystyle -\int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq -\int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

Autrement dit : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

D'où : $x^2 \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq F(x) \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ *(x^2 et x sont des constantes multiplicatives)*

On a donc montré : $\boxed{\forall x \in \left]0\ ;\ 1\right[,\ x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2).}$

3)b) *Question bien plus simple que celle la précédant...*

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(2) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln(2) = 0$. Donc d'après 3)a) et d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0}$

étant entendu que la limite en 0 correspond ici à une limite en 0^+, puisque F n'est même pas définie à gauche de 0...

De même : $\lim\limits_{x\to 1} x^2\ln(2) = \lim\limits_{x\to 1} x\ln(2) = \ln(2)$. Donc d'après 3)a) et d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} F(x) = \ln(2)}$

4) Pour tout $x \in \left]0\ ;\ 1\right[$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t$

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $\left]0\ ;\ 1\right[$, et admet donc une primitive G sur cet intervalle.

On a alors : $\forall x \in \left]0\ ;\ 1\right[$, $F(x) = \left[g(t)\right]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$

F est donc dérivable sur $\left]0\ ;\ 1\right[$ par composée, et somme de fonctions dérivables.

Rappelons que (sous réserve de dérivabilité) l'expression $u\big(v(x)\big)$ se dérive en $v'(x) \times u'\big(v(x)\big)$

Pour tout x de $\left]0\ ;\ 1\right[$, $F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = 2x \times \dfrac{1}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)}$

Donc : pour tout x de $\left]0\ ;\ 1\right[$, $F'(x) = 2x \times \dfrac{1}{2\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln(x)}$

En conclusion : $\boxed{\forall x \in \left]0\ ;\ 1\right[,\ F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}}$

5) Avant de passer à la limite, calculons $\displaystyle\int_x^{1-x} \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$.

Pourquoi $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ et pas $\left]0\ ;\ 1\right[$? De telle sorte que x soit inférieur à $1-x$, et que les bornes soient dans le sens « naturel ». Si on ne le précise pas, on peut se débrouiller, mais il faut faire attention à ne pas parler de l'intervalle $[x\ ;\ 1-x]$ puisqu'on n'est pas sûr que $x \leq 1-x$...

D'après 4) : pour tout $x \in \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$, F est une primitive de $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ sur $[x\ ;\ 1-x]$.

Donc : $\forall x \in \left]0;\ 1\right[$, $\displaystyle\int_x^{1-x} \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_x^{1-x} = F(1-x) - F(x)$

Maintenant, la limite devient simple à calculer...

$\lim\limits_{x\to 0} 1 - x = 1$ et, d'après 3)b) : $\lim\limits_{X\to 1} F(X) = \ln(2)$ donc, par composée de limites :
$\lim\limits_{x\to 0} F(1-x) = \ln(2)$
De plus, d'après 3)a) : $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$

Par somme de limites, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{1-x} \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$