Dénombrement de matrices binaires

Ayoub Hajlaoui

Ces petits vers seront mon propos liminaire
avant que nous comptions des matrices binaires.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min) *D'après HEC 2017 ECE*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels. On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

1) Combien existe-t-il de matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$?

2) Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement $n-1$ coefficients égaux à 1 ?

Correction :

1) Une matrice de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est constituée de n^2 coefficients aux emplacements distinguables. Pour chacun de ces coefficients, on a le choix entre 2 valeurs (celles de l'ensemble $\{0; 1\}$)
Il y a donc autant de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ que de listes à n^2 éléments pris dans l'ensemble $\{0; 1\}$.

Autrement dit, $\boxed{\text{il existe } 2^{n^2} \text{ matrices appartenant à } \mathcal{B}_n(\mathbb{R}).}$

2) *Reformulons à notre avantage pour nous faciliter la tâche...*

Les matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement $n-1$ coefficients égaux à 1 sont les matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 0 (les autres coefficients étant égaux à 0).

Dès lors, on peut raisonner ligne par ligne sur l'emplacement de chacun de ces coefficients nuls...

Le coefficient égal à 0 dans la première ligne a n emplacements (colonnes) possibles. Ensuite, il reste $n-1$ emplacements possibles pour le 0 de la deuxième ligne (celui de la première ligne ayant interdit une colonne). Puis, $n-2$ emplacements possibles pour le 0 de la troisième ligne. Et ainsi de suite, jusqu'au 0 de la dernière ligne, pour lequel il ne restera qu'un emplacement possible. Il y a donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$ telles matrices.

$\boxed{\text{En conclusion, il existe } n! \text{ matrices de } \mathcal{B}_n(\mathbb{R}) \text{ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement } n-1 \text{ coefficients égaux à 1.}}$

Une manière plus formelle de présenter les choses est la suivante : à chaque matrice de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne correspond exactement un coefficient égal à 0, correspond exactement une liste des n entiers entre 1 et n (faisant figurer exactement une fois chacun de ces entiers), qui indique (si l'on raisonne ligne par ligne) pour chaque ligne le numéro de colonne dans lequel se situera le 0 de cette ligne.

Autrement dit, à chacune de ces matrices correspond exactement une permutation des entiers de 1 *jusqu'à* n*.*

Par exemple, pour $n = 4$*,* $(4\ 1\ 2\ 3)$ *correspond (si l'on raisonne ligne par ligne) à la matrice :* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(En première ligne, le 0 *est en 4ème position (colonne). En deuxième ligne, il est en première position. En troisième ligne, il est en deuxième position. Et en quatrième ligne, le* 0 *est en 3ème position.)*

Comme il y a $n!$ *permutations de l'ensemble* $\{1, .., n\}$ *(ensemble de cardinal* n*), on peut en conclure qu'il y a* $n!$ *matrices de* $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ *qui vérifient la condition énoncée.*

Bien entendu, il était aussi possible de raisonner colonne par colonne, ce qui mène au même résultat.

Dans ce cas, par exemple, $(4\ 1\ 2\ 3)$ *correspond à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(En première colonne, le 0 *est en 4ème position (ligne). En deuxième colonne, il est en première position. En troisième colonne, il est en deuxième position. Et en quatrième colonne, le* 0 *est en 3ème position.)*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com