Inégalité de Boole

Ayoub Hajlaoui

La proba de l'union saurait-elle enchérir
sur la somme ? Et bien non ; nous allons l'établir.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *d'après HEC-ESSEC ECE, 2020*

On se place dans un espace probabilisé d'univers $\boldsymbol{\Omega}$, dans lequel seront considérés les événements de l'exercice.

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tous événements B_1, B_2, ... B_n, on a : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

2) Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements telle que la série $\sum_{k\geq 1} P(B_k)$ converge.

Montrer que : $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)$

Correction :

1) *On sait comparer la probabilité de l'union et la somme des probabilités dans le cas de deux événements...*
Eh oui, cette bonne vieille formule : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ *indique (puisque* $P(A\cap B) \geq 0$*) :* $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$
On sait donc cette inégalité pour deux événements, on voudrait le savoir pour $n \geq 1$ *en général...*
Un raisonnement par récurrence me semble être la voie royale ici... Mais bien entendu, il faudra l'initialiser pour $n = 1$ *(et pas 2).*

Soit, pour tout $n \geq 1$, la propriété P_n :
« pour tous événements B_1, B_2, ... B_n, $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$ »
ll est très important que l'énoncé de P_n *précise « pour tous événements ».*

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, la propriété P_n est vraie.

Initialisation : pour $n = 1$: pour tout événement B_1, d'une part $P\left(\bigcup_{k=1}^{1} B_k\right) = P(B_1)$, et d'autre part, $\sum_{k=1}^{1} P(B_k) = P(B_1)$. L'inégalité (au sens large) est bien vérifiée. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, P_n soit vraie, et montrons P_{n+1}.
Autrement dit, montrons que, pour tous événements B_1, B_2,...B_{n+1}, on a $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k)$.
Comment nous servir de l'hypothèse de récurrence pour parvenir à nos fins ?

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Pour tous événements $B_1, B_2, \dots B_{n+1}$, $\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}$

Aussi laid soit-il (et encore, à titre personnel, je ne le trouve pas si laid que ça), $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ n'est qu'un événement comme un autre.... Autrement dit, $\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}$ est une union de deux événements...

Donc $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1}\right)$

Aussi laid soit le dernier terme (et là, à titre personnel, je le trouve effectivement laid), il ne nous dérange pas spécialement...

$P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1}\right) \geq 0$ (c'est une probabilité).

Donc : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1})$

Et l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

D'où : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + P(B_{n+1})$. Autrement dit : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k)$.

P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous événements $B_1, B_2, \dots B_n$, on a : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

2) *Ça sent le théorème de limite monotone (aussi appelé théorème de continuité croissante par certains) à plein nez... Malheureusement, on ne nous dit pas que la suite d'événements $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante au sens de l'inclusion. On ne pourra donc pas utiliser le théorème directement, mais l'on devra se contenter de l'une de ses conséquences (que votre cours désigne peut-être comme un corollaire de ce théorème).*
Rappelons que ce théorème énonce que lorsque $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements croissante au sens de l'inclusion (c-à-d : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A_k \subset A_{k+1}$), on a : $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

Une conséquence du théorème de limite monotone nous permet d'affirmer :

$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \quad (*)$

Cette conséquence est la simple application du théorème à la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$

Cette suite est bien sûr croissante au sens de l'inclusion (en effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \bigcup_{k=1}^{n} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k$).

Et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, donc : $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$. D'où le résultat.

Or, d'après 1) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$.

De plus, la série $\sum_{k\geq 1} P(B_k)$ converge. On peut donc écrire : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)$

Et, d'après (*) : $\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\Big)$

Par passage à la limite dans la dernière inégalité, on obtient finalement :

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)}$$