Nombre dérivé en une solution d'équation

Ayoub Hajlaoui

En lisant l'énoncé, la pancarte est visible.
Suis la route annoncée pour atteindre ta cible.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$
1) Déterminer le domaine de définition $\boldsymbol{D}$ de f.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\boldsymbol{D}$, que l'on notera $\boldsymbol{\alpha}$.
3) Montrer que $f'(\alpha) = \sqrt{5}$.

Correction :

1) *Il faut se demander quand ce qu'il y a à l'intérieur de ln(.) est strictement positif.*
Pour tout réel x : $x \in \boldsymbol{D} \iff e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x$
La dernière équivalence est valable par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc : $x \in \boldsymbol{D} \iff 2x > 0 \iff x > 0$. Autrement dit : $\boxed{\boldsymbol{D} =]0\,;+\infty[}$

2) *On serait tenté d'utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), ou théorème de la bijection. Si l'on procédait ainsi, on pourrait conclure à l'existence et l'unicité d'une telle solution... Mais un coup d'oeil à la question 3) nous fait nous demander : comment parviendrions-nous alors à calculer $f'(\alpha)$ juste à partir de sa définition ($f(\alpha) = 0$), sans avoir sa valeur ? Nous saurions à ce stade : $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\ln(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0$, ou encore (par passage à l'exponentielle) : $e^\alpha - e^{-\alpha} = 1$ (*)*
Un calcul relativement rapide nous donnera l'expression de $f'(x)$ sur $\boldsymbol{D}$: $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
Donc $f'(\alpha) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$. Et l'information (*) nous permet de calculer le dénominateur de cette expression (dénominateur égal à 1). Mais pour le numérateur, dont on doit prouver qu'il est égal à $\sqrt{5}$, on serait bloqué...
Cette perspective sur la question 3) nous donne un coup d'avance sur la question 2), et nous fait dire qu'un théorème d'existence ne nous suffit pas pour la 2). Peut-être faut-il en fait résoudre cette équation et déterminer précisément $\boldsymbol{\alpha}$, même si ce n'est pas demandé explicitement par l'énoncé.
Si on n'a pas vu cette nécessité à la question 2), on risque de s'en rendre compte un peu tard et de résoudre l'équation en 3). Notre copie aurait alors une rédaction de corollaire de TVI en trop par rapport à la copie de quelqu'un qui aurait été prévoyant.
Pas d'inquiétude si vous n'avez pas pensé à cela. Mais il va falloir s'entraîner à lire les énoncés dans leur globalité pour, dans la mesure du possible, ne pas être surpris par les étapes suivantes.

Résolvons, sur $\boldsymbol{D}$, l'équation $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \iff \ln(e^x - e^{-x}) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 1$. *Mais comment résoudre ça ? Petite astuce pour transformer cette équation en une forme que l'on sait résoudre...*

En multipliant par $e^x \neq 0$, on a : $f(x) = 0 \iff e^{2x} - 1 = e^x \iff e^{2x} - e^x - 1 = 0$
Autrement dit : $f(x) = 0 \iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0$

En posant $X = e^x$, l'équation devient une équation du second degré : $X^2 - X - 1 = 0$. Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$

Cette équation du second degré a donc deux solutions réelles $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
Mais il ne faut pas oublier que nous avons posé $X = e^x$. On ne s'intéresse donc qu'aux solutions strictement positives de $X^2 - X - 1 = 0$...

Pour tout $x \in D$, x est solution de $f(x) = 0$ si et seulement si $[X = e^x$ est solution de $X^2 - X - 1 = 0$ et $X > 0]$

$X_1 \leq 0$ (car $1 < 5$ puis par décroissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$) et $X_2 > 0$.
Nous en déduisons que la seule solution possible de l'équation $f(x) = 0$ est $\ln(X_2)$, c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Reste à vérifier que $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in D$.

Attention, ce n'est pas acquis ! Comme nous résolvons l'équation sur D, la moindre des choses est que la solution que nous fournissons soit dans D...

$\sqrt{5} > 1$ donc $1 + \sqrt{5} > 2$, puis $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, et enfin, par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$. On a donc bien : $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in D$.

Mais c'était acquis d'avance, non ? Non, pas forcément. Nous aurions pu trouver, dans une autre situation, par exemple $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, qui n'est pas dans D (et dans ce cas, l'équation initiale n'aurait pas eu de solution sur D). Gardez en tête que l'équivalence $\ln(e^x - e^{-x}) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 1$ n'est valable que sur D (l'équation $e^x - e^{-x} = 1$ peut avoir du sens pour tout réel x, et donc pas uniquement sur D, alors que l'équation $\ln(e^x - e^{-x}) = 0$ n'a du sens que sur D.

> En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur D, et $\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Et, au vu de la suite, ce $\sqrt{5}$ n'est pas pour me déplaire...

3) f est dérivable sur D par composée de la fonction $u : x \mapsto e^x - e^{-x}$ dérivable sur D (et telle que, pour tout $x \in D, u(x) \in]0\,;+\infty[$), et de la fonction ln dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x \in D$, $f('x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Donc $f'(\alpha) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$

Or, par définition de α, $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire : $\ln(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0$ puis, par passage à l'exponentielle : $e^\alpha - e^{-\alpha} = 1$.

Donc $f'(\alpha) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{1} = e^\alpha + e^{-\alpha} = \exp\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) + \exp\left(-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

Attention à ne pas écrire de bêtise du genre $\exp\left(-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = -\exp\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$...

Par suite, $f'(\alpha) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{\exp\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}$ *(rappelons tout simplement : $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$)*

Enfin : $f'(\alpha) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2+4}{2(1+\sqrt{5})} = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5+4}{2(1+\sqrt{5})} = \dfrac{10+2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

Mais comment trouver ce $\sqrt{5}$ *demandé ? Si on ne voit pas, factorisons tout simplement par lui...*

Donc $f'(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{1+\sqrt{5}}$, et enfin : $\boxed{f'(\alpha) = \sqrt{5}}$