Probabilité de l'union et somme des probabilités

Ayoub Hajlaoui

La proba de l'union saurait-elle enchérir
sur la somme ? Et bien non ; nous allons l'établir.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min) *d'après HEC-ESSEC ECE, 2020*

On se place dans un espace probabilisé d'univers $\boldsymbol{\Omega}$, dans lequel seront considérés les événements de l'exercice.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tous événements B_1, B_2, ... B_n, on a :
$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

On rappelle que $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *est tout simplement l'union des événements* B_1, B_2,...B_n.
Autrement dit : $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$ *(et, en particulier,* $\bigcup_{k=1}^{1} B_k = B_1$*)*

Si vous êtes familier avec les séries et les unions infinies d'événements, vous pouvez consulter cet énoncé (et sa correction détaillée) ici. Il s'agit du même exercice avec une question supplémentaire.

Correction :

1) *On sait comparer la probabilité de l'union et la somme des probabilités dans le cas de deux événements...*
Eh oui, cette bonne vieille formule : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *indique (puisque* $P(A \cap B) \geq 0$*) :* $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
On sait donc cette inégalité pour deux événements, on voudrait le savoir pour $n \geq 1$ *en général...*
Un raisonnement par récurrence me semble être la voie royale ici... Mais bien entendu, il faudra l'initialiser pour $n = 1$ *(et pas 2).*

Soit, pour tout $n \geq 1$, la propriété P_n :
« pour tous événements B_1, B_2, ... B_n, $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$ »
ll est très important que l'énoncé de P_n *précise « pour tous événements ».*

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, la propriété P_n est vraie.

Initialisation : pour $n = 1$: pour tout événement B_1, d'une part $P\left(\bigcup_{k=1}^{1} B_k\right) = P(B_1)$, et d'autre part, $\sum_{k=1}^{1} P(B_k) = P(B_1)$. L'inégalité (au sens large) est bien vérifiée. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, P_n soit vraie, et montrons P_{n+1}.
Autrement dit, montrons que, pour tous événements B_1, B_2,...B_{n+1}, on a $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k)$.

Comment nous servir de l'hypothèse de récurrence pour parvenir à nos fins ?

Pour tous événements $B_1, B_2, \ldots B_{n+1}$, $\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}$

Aussi laid soit-il (et encore, à titre personnel, je ne le trouve pas si laid que ça), $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *n'est qu'un événement comme un autre.... Autrement dit,* $\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}$ *est une union de deux événements...*

Donc $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1}\right)$

Aussi laid soit le dernier terme (et là, à titre personnel, cette fois-ci, je le trouve effectivement laid), il ne nous dérange pas spécialement...

$P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1}\right) \geq 0$ (c'est une probabilité).

Donc : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1})$

Et l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

D'où : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + P(B_{n+1})$. Autrement dit : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k)$.
P_{n+1} est donc vraie.

<u>Conclusion</u> : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous événements $B_1, B_2, \ldots B_n$, on a : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$