Solutions polynomiales d'une équation différentielle

Ayoub Hajlaoui

Voici la conclusion qui deviendra la nôtre :
certains de ces lambdas sont moins lambda que d'autres

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) *d'après agrégation externe 2010*

Si vous n'êtes pas assez familier avec le signe somme - que vous serez amenés à manipuler dans cet exercice (linéarité, changement d'indice etc...) - vous pouvez consulter cette playlist.

Pour tout réel λ, on considère l'équation différentielle (E_λ) suivante :
(A_λ) : $y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$

Rappelons qu'une fonction y définie sur $\mathbb{R}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (A_λ) si et seulement si $\left[\textit{ y est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \textit{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) \quad \right]$

1) On suppose dans cette question que (E_λ) admet sur $\mathbb{R}$ une solution polynomiale non nulle P.
a) Si P est une fonction constante, montrer que $\lambda = 0$.
b) Si P est de degré 1, montrer que $\lambda = 2$.
c) Si P est de degré $n \geq 2$, montrer que $\lambda = 2n$.

2) On suppose dans cette question que λ est un entier naturel pair. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = 2n$.
On suppose de plus que n est un entier naturel pair et s'écrit $n = 2p$.
Montrer que la fonction polynomiale P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!} x^{2i}$ est solution de (E_λ)
On admettra que si n est un entier naturel impair et s'écrit $n = 2p+1$, alors la fonction polynomiale P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{(-4)^i}{(p-i)!(2i+1)!} x^{2i+1}$ est solution de (E_λ)

3) Déterminer l'ensemble des réels λ pour lesquels (E_λ) admet sur $\mathbb{R}$ une solution polynomiale non nulle.

Correction :

1)a) P est une fonction constante non nulle. Il existe donc $K \in \mathbb{R}^*$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = K$.
Et P vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0$, avec, pour tout réel x, $P'(x) = P''(x) = 0$
On a donc : $\lambda K = 0$. Or, $K \neq 0$. On en conclut donc : $\boxed{\lambda = 0}$.

1)b) P est de degré 1. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax + b$

$a \neq 0$, sinon P ne serait pas de degré 1 mais de degré 0 (si constante b non nulle) ou de degré $-\infty$ (par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$).

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = a$ et $P''(x) = 0$. Et comme P vérifie (E_λ), on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R},\ -2x \times a + \lambda \times (ax + b) = 0$. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda - 2)ax + \lambda b = 0$
La fonction affine $x \mapsto (\lambda - 2)ax + \lambda b$ est donc nulle. Donc $(\lambda - 2)a = 0$
(et $\lambda b = 0$ mais on s'en fiche ici)
Or : $a \neq 0$. Donc $\lambda - 2 = 0$. D'où : $\boxed{\lambda = 2}$.

1)c) *Il va falloir écrire $P(x)$ comme une somme...*

Il existe $n+1$ réels $a_0,\ a_1, \ldots a_n$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
Et $a_n \neq 0$, sinon P ne serait pas de degré n, mais de degré strictement inférieur à n

P étant une fonction polynomiale, elle est infiniment dérivable (*c'est-à-dire dérivable autant de fois que l'on veut*), et on a, en dérivant terme à terme dans la somme :

$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

En effet, pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, la dérivée de $x \mapsto a_k x^k$ est $x \mapsto k a_k x^{k-1}$. Et, pour $k = 0$, la fonction $x \mapsto a_0 x^0 = a_0$ est constante, donc sa dérivée est nulle. C'est pourquoi je fais commencer la somme de $P'(x)$ à $k = 1$.

De même : $\forall x \in \mathbb{R},\ P''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}$
C'est parce que $n \geq 2$ (cf énoncé) que j'ai pu écrire une telle somme.

P vérifiant (E_λ), on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$

Autrement dit (en rentrant le $2x$ de la seconde somme par linéarité) :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} 2k a_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$

Mais que faire de cette égalité pour déterminer λ ? N'oublions pas ce « $\forall x \in \mathbb{R}$ » ...

La fonction $x \mapsto \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} 2k a_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est une fonction polynomiale nulle.

Dans l'expression de cette fonction, les coefficients devant chaque puissance de x sont donc nuls. Cela peut nous donner pas mal d'informations, à condition que nous réarrangions les sommes pour que chaque coefficient devant chaque puissance x^k soit facilement identifiable. Ou alors, il suffirait de considérer une puissance x^k bien choisie, et de se servir de la nullité du coefficient devant cette puissance...

Mon choix se porte automatiquement sur le coefficient devant x^n. En effet, il fait intervenir du a_n, qui est non nul, et dont on pourra donc se débarrasser aisément pour accéder à λ.

Le terme en x^n dans cette expression est : $-2n a_n x^n + \lambda a_n x^n = a_n(\lambda - 2n)x^n$ (la première somme n'y contribue pas, vu qu'elle fait intervenir, au mieux, du x^{n-2})

Nous pouvons donc en déduire : $a_n(\lambda - 2n) = 0$.

Et comme $a_n \neq 0$ *(voilà l'intérêt d'avoir choisi de nous intéresser au terme devant x^n)*, nous pouvons conclure finalement : $\boxed{\lambda = 2n}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Si on n'a pas vu une telle astuce d'emblée, on peut arriver au résultat (mais c'est plus long...) en remaniant classiquement ces sommes pour obtenir l'expression d'une fonction polynomiale avec le coefficient devant chaque x^k mis en évidence. (Quitte à nous rendre compte à la fin que c'est bien le coefficient devant x^n qui nous intéresse...) Allez, même si c'est plus fastidieux, faisons-le, histoire de nous exercer un peu sur les sommes :

Par changement d'indice ($i = k - 2$, i.e. $k = i + 2$) dans la première somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{i=0}^{n-2} (i+2)(i+1)a_{i+2}x^i = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k$$

Histoire d'avoir du x^k chez tout le monde... (La dernière égalité n'est pas un changement d'indice mais juste un changement de nom)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{n} 2ka_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

Le terme pour $k = 0$ dans la deuxième somme est nul, ce qui me permet de la démarrer à $k = 0$ (au lieu de $k = 1$) par commodité...

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{n} 2ka_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$

Dans la première somme, k défile de 0 à $n - 2$. Dans la deuxième et la troisième somme, k défile de 0 à n. Les k en commun sont donc tous ceux de 0 à $n - 2$...

Il suffira donc de sortir les termes en trop pour les deuxième et troisième somme, à savoir les termes correspondant à $k = n - 1$ et $k = n$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{n-2} 2ka_k x^k - 2(n-1)a_{n-1}x^{n-1} - 2na_n x^n$$
$$+ \lambda \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^k + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda a_n x^n = 0$$

On peut maintenant regrouper les trois sommes, et factoriser par x^k à l'intérieur de la somme unique obtenue, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-2} \big((k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + \lambda a_k\big)x^k - 2(n-1)a_{n-1}x^{n-1} - 2na_n x^n$$
$$+ \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda a_n x^n = 0$$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-2} \big((k+2)(k+1)a_{k+2} + (\lambda - 2k)a_k\big)x^k + \big(\lambda - 2(n-1)\big)a_{n-1}x^{n-1}$ $+ \big(\lambda - 2n\big)a_n x^n$ est donc nulle.

Et, en considérant le coefficient devant x^n, qui doit être nul, et le fait que a_n soit non nul, on aboutit là encore à : $\lambda = 2n$

2) *Il s'agit « juste » de dériver (deux fois) P sans s'emmêler les pinceaux, et de simplifier l'expression de $P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x)$...*

Pour tout réel x, $P(x) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i}$. En supposant que $p \geq 1$, et en dérivant terme à terme : *(il ne faudra donc pas oublier de traiter le cas $p = 0$ après)*

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i \times 2i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i \times 2i}{(p-i)!(2i-1)! \times 2i}x^{2i-1}$$

Quelques remarques :

- de même qu'en 1)c), je fais commencer la somme de $P'(x)$ *à* $i = 1$*. En effet, pour* $i = 0$*, la fonction* $x \mapsto \dfrac{(-4)^0}{(p-0)!(2\times 0)!}x^{2\times 0} = \dfrac{1}{p!}$ *est constante, donc sa dérivée est nulle.*
Et, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$*, la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i}$ *est simplement* $x \mapsto \dfrac{(-4)^i \times 2i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i-1}$

- rappelons que pour tout entier naturel n*,* $(n+1)! = n! \times (n+1)$*. Et comme, pour tout entier* $i \geq 1$*,* $2i-1$ *est bien un entier naturel, on a :* $(2i)! = (2i-1)! \times 2i$

Donc, pour tout réel x, $P'(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-1)!}x^{2i-1}$

De même, pour tout réel x, $P''(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i(2i-1)}{(p-i)!(2i-1)!}x^{2i-2}$

Hein ? Mais pourquoi ne pas commencer la somme de $P''(x)$ *à* $i = 2$ *? (comme en 1)c)) Parce que cette fois-ci, le terme correspondant à* $i = 1$ *dans la somme de* $P'(x)$ *n'est pas constant ! Il fait en effet figurer du* $x^{2\times 1-1}$*, c'est-à-dire du* x*…*

Et comme, pour tout entier $i \geq 1$*,* $2i-2$ *est un entier naturel, on a encore :*
$(2i-1)! = (2i-2)! \times (2i-1)$

Donc, pour tout réel x, $P''(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i(2i-1)}{(p-i)!(2i-2)! \times (2i-1)}x^{2i-2} = \sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-2)!}x^{2i-2}$

Ainsi, pour tout réel x : $P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x)$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-2)!}x^{2i-2} - 2x\sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-1)!}x^{2i-1} + 2n\sum_{i=0}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i} \quad \textit{car } \lambda = 2n$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-2)!}x^{2i-2} - 2\sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-1)!}x^{2i} + 4p\sum_{i=0}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i} \quad \textit{car } n = 2p$$

Par changement d'indice ($j = i - 1$, de telle sorte que $2j = 2i - 2$…) :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-2)!}x^{2i-2} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-4)^{j+1}}{\big(p-(j+1)\big)!(2j)!}x^{2j} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-4)^{i+1}}{(p-i-1)!(2i)!}x^{2i}$$

Donc, pour tout réel x :

$$P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-4)^{i+1}}{(p-i-1)!(2i)!}x^{2i} - 2\sum_{i=1}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-1)!}x^{2i} + 4p\sum_{i=0}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i}$$

Dans la première somme, i *défile de* 0 *à* $p-1$*. Dans la deuxième somme,* i *défile de* 1 *à* p*. Les* i *en commun sont donc tous ceux de* 1 *à* $p-1$*, mais attention ! À condition que* $1 \leq p-1$*, c'est-à-dire à condition que* $p \geq 2$*…*
Il nous faudra donc traiter les cas $p = 0$ *et* $p = 1$ *(simples) à part.*

Si $p \geq 2$: $\forall x \in \mathbb{R},\ P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x)$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{(-4)^{i+1}}{(p-i-1)!(2i)!} - 2\frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-1)!} + 4p\frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}\right)x^{2i} + \frac{(-4)^{0+1}}{(p-0-1)!(2\times 0)!}$$

$$-2 \times \frac{(-4)^p}{(p-p)!(2p-1)!}x^{2p} + 4p\left(\frac{(-4)^0}{(p-0)!(2\times 0)!}x^{2\times 0} + \frac{(-4)^p}{(p-p)!(2\times p)!}x^{2p}\right)$$

Commençons par nous intéresser aux termes dans la somme, pour ensuite nous intéresser aux termes résiduels.

Pour tout $i \in [\![1;p-1]\!]$, $\dfrac{(-4)^{i+1}}{(p-i-1)!(2i)!} - 2\dfrac{(-4)^i}{(p-i)!(2i-1)!} + 4p\dfrac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}$

$= \dfrac{(-4)^{i+1}(p-i) - 2(-4)^i \times 2i + 4p(-4)^i}{(p-i)!(2i)!} = \dfrac{(-4)^{i+1}(p-i) + (-4)^{i+1} \times i - p(-4)^{i+1}}{(p-i)!(2i)!}$

(en rappelant : $(p-i)! = (p-i-1)!(p-i)$ *et* $(2i)! = (2i-1)! \times 2i$*)*

$= \dfrac{(-4)^{i+1}(p-i+i-p)}{(p-i)!(2i)!} = 0$. *Toute la somme est donc nulle. Ne restent que les termes résiduels.*

D'où (toujours dans le cas $p \geq 2$) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{P''}(x) - 2x\boldsymbol{P'}(x) + \lambda \boldsymbol{P}(x)$

$$= \frac{(-4)^{0+1}}{(p-0-1)!(2\times 0)!} - 2\times\frac{(-4)^p}{(p-p)!(2p-1)!}x^{2p} + 4p\left(\frac{(-4)^0}{(p-0)!(2\times 0)!}x^{2\times 0} + \frac{(-4)^p}{(p-p)!(2\times p)!}x^{2p}\right)$$
$$= \frac{-4}{(p-1)!} - 2\times\frac{(-4)^p}{(2p-1)!}x^{2p} + 4p\left(\frac{1}{p!} + \frac{(-4)^p}{(2p)!}x^{2p}\right) = \frac{-4}{(p-1)!} - 2\times\frac{(-4)^p}{(2p-1)!}x^{2p} + \frac{4p}{p!} + \frac{4p(-4)^p}{(2p)!}x^{2p}$$
$$= \frac{-4}{(p-1)!} - 2\times\frac{(-4)^p}{(2p-1)!}x^{2p} + \frac{4p}{(p-1)!\times p} + \frac{2\times 2p\times(-4)^p}{(2p-1)!\times 2p}x^{2p}$$
$$= \frac{-4}{(p-1)!} - 2\times\frac{(-4)^p}{(2p-1)!}x^{2p} + \frac{4}{(p-1)!} + 2\times\frac{(-4)^p}{(2p-1)!}x^{2p} = 0$$

Nous avons bien montré, dans le cas où $p \geq 2$, que la fonction polynomiale définie par l'énoncé est solution de $(\boldsymbol{E}_\lambda)$.

Dans le cas où $p = 0$: $n = 2\times 0 = 0$ et $\lambda = 0$. Dans ce cas, $\boldsymbol{P}$ est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{P}(x) = 1$, et on vérifie facilement que $\boldsymbol{P}$ est solution de $(\boldsymbol{E}_0)$.

Dans le cas où $p = 1$: $n = 2$ et $\lambda = 4$. P est alors la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{P}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{1} \frac{(-4)^i}{(1-i)!(2i)!}x^{2i} = 1 + \frac{-4}{2}x^2 = -2x^2 + 1$

On a alors, pour tout réel x : $\boldsymbol{P''}(x) - 2x\boldsymbol{P'}(x) + \lambda\boldsymbol{P}(x) = -4 - 2x\times(-4x) + 4(-2x^2+1)$
$= -4 + 8x^2 - 8x^2 + 4 = 0$, et $\boldsymbol{P}$ est, une fois encore, solution de $(\boldsymbol{E}_0)$.

Nous avons bien montré que si λ est un entier naturel pair, si $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{p}$ est un entier naturel pair, alors la fonction polynomiale $\boldsymbol{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{P}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(-4)^i}{(p-i)!(2i)!}x^{2i}$ est solution de $(\boldsymbol{E}_\lambda)$.

La correction de cette question peut sembler particulièrement longue. Indéniablement, c'est une question assez calculatoire. Mais j'ai un petit peu exagéré le détail de certains calculs, afin de ne pas perde les lecteurs les moins avertis. J'aurais notamment pu passer certaines étapes comme celle où je détaille la simplification de $\dfrac{p}{p!}$*...*

3) *L'exercice nous prend par la main pour nous faire suivre un type de raisonnement appelé analyse-synthèse*

En 1), nous avons montré que si $(\boldsymbol{E}_\lambda)$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution polynomiale non nulle, alors λ est un entier naturel pair (issue observée pour chacune des questions 1)a), 1)b) et 1)c)).
Nous avons donc établi une condition ***nécessaire*** *sur* λ *pour que* $(\boldsymbol{E}_\lambda)$ *admette sur* $\mathbb{R}$ *une solution polynomiale non nulle. C'est l'étape d'****analyse****.*

En 2), nous avons réciproquement montré que si λ est un entier naturel pair, alors $(\boldsymbol{E}_\lambda)$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution polynomiale non nulle (les polynômes $\boldsymbol{P}$ exhibés à chaque cas, et cela reste aussi valable, d'après l'énoncé, dans le cas $\boldsymbol{n}$ impair qu'il n'était pas demandé de traiter).

Nous avons montré que la condition nécessaire établie précédemment sur $\boldsymbol{\lambda}$ *pour que* $(\boldsymbol{E_\lambda})$ *admette sur* $\mathbb{R}$ *une solution polynomiale non nulle est en fait aussi* ***suffisante****. C'est l'étape de* ***synthèse****.*

En conclusion, l'équation $(\boldsymbol{E_\lambda})$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution polynomiale non nulle si et seulement si $\boldsymbol{\lambda}$ est un entier naturel pair.

Autrement dit, l'ensemble des réels $\boldsymbol{\lambda}$ pour lesquels $(\boldsymbol{E_\lambda})$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution polynomiale non nulle est l'ensemble des entiers naturels pairs.