Arctan et somme

Ayoub Hajlaoui

« Si ! Sur le bout des doigts je connais mes formules !
- C'est très bien mais tu dois justifier tes calculs. »

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

1) Montrer que pour tout réel positif x : $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

Correction :

On a bien entendu envie d'appliquer tan à ces deux expressions et, pour celle de gauche, appliquer la formule $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ *(à supposer qu'on l'ait en tête...), mais il faut :*
- justifier l'applicabilité de cette formule
- ensuite, à supposer que l'on arrive à montrer - ce que l'on souhaite - que les tangentes des expressions de gauche et de droite sont égales, justifier que l'on peut passer de l'égalité de leurs tangentes à leur égalité (sans tangente)

Par définition de arctan, pour tout réel positif x, $\arctan(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

D'où l'existence de leurs tangentes respectives, qui sont en fait simplement $x+1$ *et* x*. Tant mieux, mais il faut aussi justifier l'existence de* $\tan\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)$*...*
Si l'on se contente des encadrements $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2}$ *et* $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$*, on a* $-\frac{\pi}{2} < -\arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ *et donc, en sommant ce dernier encadrement avec* $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2}$ *(et surtout pas en faisant leur différence...),on obtient :* $-\pi < \arctan(x+1)-\arctan(x) < \pi$*, ce qui ne justifie clairement pas l'existence de* $\tan\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)$
Il nous faut donc des encadrements plus précis, et c'est tout à fait possible ! Il y a une hypothèse sur x *dont nous ne nous sommes pas encore servis...*

$x+1$ et x sont deux réels positifs, donc (par croissance de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$ et comme $\arctan(0)=0$), on a en fait : $0 \leq \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) \leq 0$
D'où : $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x+1) - \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ *Et d'où l'existence de* $\tan\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)$

Rappelons à toutes fins utiles que si $a \leq b$ *et* $c < d$*, on a évidemment* $a+c < b+d$

Donc : $\tan\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big) = \dfrac{\tan\big(\arctan(x+1)\big) - \tan\big(\arctan(x)\big)}{1+\tan\big(\arctan(x+1)\big)\tan\big(\arctan(x)\big)} = \dfrac{x+1-x}{1+(x+1)x}$

D'où : $\tan\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

D'autre part, trivialement : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

Donc $\tan\left(\arctan(x+1)-\arctan(x)\right) = \tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)\right)$

De plus, on a montré $\arctan(x+1)-\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Et on sait : $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Or, l'application $\tan$ est strictement croissante (donc injective) sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Cela justifie : $\forall \alpha, \beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\,:\, \tan(\alpha) = \tan(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$

Nous pouvons donc en conclure que $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0,\ \arctan(x+1)-\arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $k \geq 0$, donc d'après 1) :

$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan(k+1)-\arctan(k)$.

En sommant ces égalités, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\arctan(k+1)-\arctan(k)\right)$

Ce télescopage gros comme une maison... Si le mot « télescopage » ne vous inspire rien, regardez cette vidéo.

Enfin, par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan(n+1)-\arctan(0) = \arctan(n+1)$

Et on nous demande la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$...

Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Nous pouvons donc en conclure : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com