Formule itérée de Pascal

Ayoub Hajlaoui

- Je voudrais m'éviter ces tons cérémonieux...
- Peux-tu nous proposer quelque ton qui soit mieux ?

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Montrer que pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Correction :

Rappelons la formule du triangle de Pascal : pour tous K, $N \in \mathbb{N}$ tels que $K < N$, on a : $\displaystyle\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{N+1}{K+1}$.

Dès lors, on peut, pour p entier naturel fixé, raisonner par récurrence sur $n \geq p$. Mais cette récurrence est évitable ! Voici ce qu'elle donne (et sera présentée en deuxième page une preuve sans récurrence) :

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence : $\forall n \geq p,\ \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

<u>Initialisation</u> : pour $n = p$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$ et $\displaystyle\binom{p+1}{p+1} = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ et la propriété est initialisée

<u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain entier naturel $n \geq p$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, et montrons : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$.

$\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Enfin, la formule du binôme de Newton (*appliquée, avec les notations du rappel ci-haut, à $K = p$ et $N = n+1$ qui vérifient bien $K < n$ car $p \leq n < n+1$*) fournit : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$

<u>Conclusion</u> : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :
$\forall n \geq p,\ \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Enfin, ce raisonnement étant valable pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a bien montré que :

$$\boxed{\text{pour tous entiers naturels } p \text{ et } n \text{ tels que } p \leq n : \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Sans récurrence, on peut utiliser directement la formule du triangle de Pascal sur le terme général de la somme donnée par l'énoncé :

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$.

Si $p < n$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p}$

avec, pour tout $k \in [\![p+1; n]\!], k \geq p+1$ donc $k > p$.
La distinction de cas $p < n$ (puis $p = n$) a justement été faite pour pouvoir utiliser la formule du triangle de Pascal dans le premier cas.

La formule du triangle de Pascal (appliquée à $K = p$ et $N = k$) fournit donc (pour $k \in [\![p+1; n]\!]$) :
$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$. Autrement dit : $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ *Ahah...*
Et donc : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$
On reconnaît un télescopage : en posant $u_k = \binom{k}{p+1}$, on se retrouve avec du $u_{k+1} - u_k$ dans la somme, ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_p$.
Besoin de vous rafraîchir la mémoire sur cette notion de télescopage ? Cf cette vidéo.

Par télescopage, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 = \binom{n+1}{p+1}$
D'où le résultat demandé.

Et si $p = n$, l'égalité demandée s'obtient trivialement (pour le calcul, cf initialisation de la récurrence en première page).

On a bien montré que pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Même si le fait d'éviter la récurrence lorsque c'est possible peut sembler plus élégant, il est plus difficile de « penser à l'envers » dans la seconde méthode (en remplaçant notre terme général par une différence, et en faisant attention à distinguer le cas $p = n$). En ce sens, la première méthode, avec une récurrence relativement simple, n'a nullement à rougir de la seconde.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com