Morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Ayoub Hajlaoui

Impétueux faucons, montrons à tire d'aile
que de telle fonction, il n'est qu'un seul modèle.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\varphi(1) = 1$ et, pour tous réels x et y :
$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ et $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$ *On dit que φ est un morphisme d'anneaux.*
1) Montrer que pour tout réel non nul x, $\varphi(x) \neq 0$.
2) En déduire que φ est injective.
3) Montrer que pour tout $x > 0, \varphi(x) > 0$.
4) En déduire que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5) Montrer que φ est l'application identité sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1) *Nous avons à notre disposition des relations applicables pour tous x et y réels de notre choix... Ici, x est supposé non nul. Quel autre réel en lien avec x puis-je choisir précisément lorsque x est non nul ? $\dfrac{1}{x}$...*
Pour tout réel non nul x, on a : $\varphi\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = \varphi(x) \times \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Autrement dit : $\varphi(1) = \varphi(x) \times \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$
Et comme $\varphi(1) = 1$, on obtient : $\varphi(x) \times \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$
Et alors ? Comment en conclure que $\varphi(x) \neq 0$?

Si on avait $\varphi(x) = 0$, on aurait alors $\varphi(x) \times \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, ce qui n'est pas (ce produit étant égal à 1). Donc $\varphi(x) \neq 0$.
Nous avons bien montré que $\boxed{\text{pour tout réel non nul } x,\ \varphi(x) \neq 0.}$

2) Montrons que pour tous réels x et y, si $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors $x = y$.
Soient x et y deux réels tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$.
Que faire de cette égalité ? Je n'ai pas mille options...

Autrement dit $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$. *Ah, si seulement ce signe $-$ avait été un signe $+$, j'aurais pu utiliser une des propriétés de φ ! Mais si je veux obtenir une propriété avec le signe $-$, forçons un peu les choses...*

D'après une propriété de φ, pour tout réel a, $\varphi\big(a + (-a)\big) = \varphi(a) + \varphi(-a)$.
Autrement dit, $\varphi(0) = \varphi(a) + \varphi(-a)$. *Mais on ne connaît pas $\varphi(0)$... Peut-on le connaître ?*

Et $\varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$. Autrement dit $\varphi(0) = 2\varphi(0)$, et donc $\varphi(0) = 0$.

On a donc : $\forall a \in \mathbb{R},\ \varphi(-a) + \varphi(a) = 0$. Autrement dit : $\forall a \in \mathbb{R},\ \varphi(-a) = -\varphi(a)$ (*)

Reprenons notre x et notre y ; on avait failli les oublier...

Nous avions montré : $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$. Or, $\varphi(x-y) = \varphi\big(x + (-y)\big) = \varphi(x) + \varphi(-y)$
Donc, d'après (*), $\varphi(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y)$. Nous avons donc : $\varphi(x-y) = 0$.

Cela doit nous faire penser à 1), où nous avions montré l'implication $x \neq 0 \Longrightarrow \varphi(x) \neq 0$. Sa contraposée est : $\varphi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

La contraposée de 1) fournit donc : $x - y = 0$. Nous avons donc : $x = y$.

Nous avons montré que pour tous réels x et y, si $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors $x = y$. Cela prouve que $\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$

3) *Avec ce qui a été montré en 1), il suffit en réalité de montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \geq 0$...*

Soit $x > 0$. *Ceux qui se souviennent plus ou moins de leurs démonstrations de cours de Première/Terminale, notamment celle de la positivité de la fonction exponentielle, sont avantagés... Ce ne sont bien sûr pas les mêmes propriétés mais l'idée reste similaire :*

x étant positif, on a : $\varphi(x) = \varphi\big(\sqrt{x} \times \sqrt{x}\big) = \varphi\big(\sqrt{x}\big) \times \varphi\big(\sqrt{x}\big) = \Big(\varphi\big(\sqrt{x}\big)\Big)^2 \geq 0$
Donc $\varphi(x) \geq 0$.
De plus, x étant strictement positif, donc non nul, on a, d'après 1), $\varphi(x) \neq 0$. Enfin, $\varphi(x) > 0$.

Nous avons bien montré que $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \varphi(x) > 0.}$

4) *Il s'agit « tout simplement » de montrer que pour tous réels x et y, si $x < y$, alors $\varphi(x) < \varphi(y)$. Mais comment nous servir de la question 3 ? Qui jouerait le rôle du réel strictement positif de la 3 ici ? Si $x < y$, $y - x > 0$...*

Soient x et y deux réels tels que $x < y$.
On a : $\varphi(y) = \varphi\big(x + (y-x)\big) = \varphi(x) + \varphi(y-x)$, avec $y - x > 0$. Donc d'après 3), $\varphi(y-x) > 0$.
D'où $\varphi(y) > \varphi(x)$.

$\boxed{\varphi \text{ est donc bien strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

5) En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) = \varphi(n) + \varphi(1) = \varphi(n) + 1$.
À partir du fait (prouvé en 2) que $\varphi(0) = 0$, et par une récurrence immédiate, on montre alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = n$.
La relation (*) permet ensuite d'étendre ce résultat sur $\mathbb{Z}$: $\forall p \in \mathbb{Z},\ \varphi(p) = p$
Ensuite, d'après ce qui a été fait pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$: $\varphi\Big(\dfrac{1}{q}\Big) = \dfrac{1}{\varphi(q)} = \dfrac{1}{q}$
D'où, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$, $\varphi\Big(\dfrac{p}{q}\Big) = \varphi\Big(p \times \dfrac{1}{q}\Big) = \varphi(p) \times \varphi\Big(\dfrac{1}{q}\Big) = p \times \dfrac{1}{q} = \dfrac{p}{q}$
On a donc montré : $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = r$.
Comment, dès lors, étendre ce résultat, pour l'instant valable pour les rationnels, à tous les réels ? On sent la densité à plein nez, mais attention à ne pas l'utiliser fallacieusement, en citant par exemple une continuité de f qui n'a été prouvée à aucun moment ! Par contre, on sait que f est strictement croissante...
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (u_n) croissante de limite x, et une suite de rationnels (v_n) décroissante de limite x.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x \leq v_n$ et donc, par (stricte) croissance de φ sur $\mathbb{R}$, $\varphi(u_n) \leq \varphi(x) \leq \varphi(v_n)$
Or, u_n et $v_n \in \mathbb{Q}$, donc $\varphi(u_n) = u_n$ et $\varphi(v_n) = v_n$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

L'encadrement précédent s'écrit donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \varphi(x) \leq v_n$.
Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(x) = x$

(Oui, le voleur est ici la suite constante $(\varphi(x))_{n \in \mathbb{N}}$*)*

Autrement dit : $\varphi(x) = x$.

Nous avons donc montré : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x$. $\boxed{\varphi \text{ est donc l'application identité sur } \mathbb{R}.}$