# Somme et factorielle

Ayoub Hajlaoui

*Avant de dessiner quelque meilleur décor,*
*il faut l'imaginer s'il n'y est pas encore.*

**Énoncé :** (temps conseillé : 10 min)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

**Correction :**

*On ne sait pas calculer tant de sommes que cela... Est-ce une somme géométrique ? Certainement pas ! Est-ce une autre somme de référence (somme des* $k$ *, des* $k^2$*...) ou peut-on se ramener à une telle somme ? On ne voit pas trop comment.*
*Peut-être un télescopage ? Pour cela, il serait bon de faire apparaître du* $(k+1)!$ *Je n'en vois pas... Mais, pour reprendre Balthazar dans le film Les rois mages : « si tu peux voir ce qui n'existe pas, conçois dès lors que tu peux ne pas voir ce qui existe » ...*

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \times k! = \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1) \times k! \ - k!\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)! \ - k!\right]$$

*Le voilà, mon* $(k+1)!$ *, avec, en prime, une disposition tout à fait avantageuse...*

Par télescopage, on obtient donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1!$

*Besoin de vous rafraîchir la mémoire sur cette notion de télescopage ? Cf cette vidéo.*

Finalement : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com