Factorielles, puissances, majoration

Ayoub Hajlaoui

Nous ne calculons pas sa limite aujourd'hui
mais majorons par trois ce capricieux produit.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

2) En déduire que pour tous entiers naturels non nuls k et n tels que $k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$

Correction :

1) *La marche à suivre est relativement téléphonée ici... L'entrée en jeu de factorielles et de puissances nous fait dire que le passage d'un rang au suivant serait relativement simple. Oui, dans le cadre de l'hérédité d'une récurrence.*

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété P_k : « $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul k, la propriété P_k est vraie.

Initialisation : pour $k = 1$: d'une part, $\frac{1}{1!} = 1$ et d'autre part, $\frac{1}{2^{1-1}} = 1$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $k \geq 1$, P_k soit vraie, et montrons P_{k+1}.
Autrement dit, supposons : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, et montrons : $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$
$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} \times \frac{1}{k+1}$, avec $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ et $\frac{1}{k+1} > 0$. Donc $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^{k-1}(k+1)}$
Et $k \geq 1$ donc $k+1 \geq 2$ et donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$
D'où : $\frac{1}{2^{k-1}(k+1)} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$. Et enfin - *par transitivité de la relation d'ordre* $\leq$ *sur* $\mathbb{R}$ *si l'on veut frimer un peu* - on obtient : $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$. Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence nous permet donc de conclure que pour tout entier naturel non nul k, P_k est vraie.

Autrement dit : $\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } k,\ \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}}$

2) *Ça tombe bien, le* $\frac{1}{k!}$ *que l'on a majoré à la question précédente se retrouve dans l'expression de* $\binom{n}{k}$*...*

Pour tous entiers naturels non nuls k et n tels que $k \leq n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

D'après 1), $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, donc (comme $\frac{n!}{(n-k)!} > 0$) : $\quad \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{2^{k-1}}$

Il suffit de montrer : $\frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k$*, et le tour est joué...*

Or, si $n > k$: $\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{j=n-k+1}^{n} j$

(Les factorielles se simplifient : $\frac{1 \times 2 \times ... \times (n-k) \times (n-k+1) \times ... \times n}{1 \times 2 \times ... \times (n-k)} = (n-k+1) \times ... \times n$ *)*

$\prod_{j=n-k+1}^{n} j$ est un produit de k termes tous inférieurs ou égaux à n (et positifs). Donc $\prod_{j=n-k+1}^{n} j \leq n^k$

Oui, lorsque l'indice j *va de* $n-k+1$ *à* n*, il y a bien* $n-(n-k+1)+1 = k$ *termes...*

On a donc bien : $\frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k$

Finalement : $\boxed{\text{pour tous entiers naturels non nuls } k \text{ et } n \text{ tels que } k \leq n, \text{ on a bien } \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}}$

3) *Quel rapport avec ce qui précède ? Des coefficients binomiaux... Une somme élevée à la puissance* n*...*

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k}$

Je pouvais mettre l'exposant k *sur le* 1 *et l'exposant* $n-k$ *sur le* $\frac{1}{n}$*, mais ça me semble bien moins intéressant, vu qu'il y a du* n^k *dans l'inégalité obtenue précédemment...*

Autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$

On a bien sûr envie d'utiliser la majoration obtenue en 2), mais attention ! Elle est valable pour $k \geq 1$*...*

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} \frac{1}{n^0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{2^{k-1}} \times \frac{1}{n^k}$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$

Or, $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 3$

$\boxed{\text{On a donc bien, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3}$