Limite de somme avec exponentielles

Ayoub Hajlaoui

L'humain bien au rebours de l'inconscient bétail
n'ânonne point son cours sans souci du détail.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}(1 - 2e^{-kx})$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n(x)$

Correction :

Pour tout entier naturel non nul n, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} - 2 \sum_{k=1}^{n} e^{-2kx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{-x})^k - 2 \sum_{k=1}^{n} (e^{-2x})^k$

On a bien envie d'utiliser une formule de calcul de somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (ou mieux ici, de calcul de limite d'une série géométrique), mais attention aux conditions...
La formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, valable pour une raison q différente de 1, est à connaître « en français, » pour éviter de mettre du $n+1$ mécaniquement sans réfléchir en exposant...
Cette somme vaut : (premier terme de la somme) $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$
Et comme, souvent, vous calculez des sommes de $k = 0$ à n, cela fait $n+1$ termes (ne pas oublier de compter 0), d'où le $1 - q^{n+1}$ que l'on rencontre souvent au numérateur. Mais attention à ne pas mettre ça tout le temps, sans réfléchir. Et attention à ne pas oublier le premier terme de la somme (qui vaut 1 lorsque vous avez un terme général q^k dans la somme et que votre somme part de $k = 0$).

Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $e^{-x} = 1$? $e^{-2x} = 1$?

$e^{-x} = 1 \iff -x = 0 \iff x = 0$. De même, $e^{-2x} \iff x = 0$.
La seule valeur de x pour laquelle nous ne pouvons pas utiliser notre formule est donc $x = 0$...

Pour tout $x \neq 0$, $S_n(x) = e^{-x} \times \dfrac{1 - (e^{-x})^n}{1 - e^{-x}} - 2e^{-2x} \times \dfrac{1 - (e^{-2x})^n}{1 - e^{-2x}}$

Dans le cas où e^{-x} et e^{-2x} seraient strictement compris entre -1 et 1, on sait facilement calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$...

• Si $x > 0$, $0 < e^{-x} < 1$ et $0 < e^{-2x} < 1$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, par le fait que $e^0 = 1$, et par stricte positivité de exp sur $\mathbb{R}$)
Dans ce cas, on a donc : $\lim_{n \to +\infty} (e^{-x})^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} (e^{-2x})^n = 0$.

Par opérations sur les limites, on obtient donc : $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \dfrac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Techniquement, on a déterminé la limite dans ce cas. Par courtoisie, essayons de la donner sous une forme plus simple. Personnellement, je n'aime pas trop les $-x$ et $-2x$ en exposant...

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{2}{e^{2x} - 1}$

(On a juste multiplié le numérateur et le dénominateur de la première fraction par e^x, et le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction par e^{2x})
Le second dénominateur me donne envie de faire quelque chose...

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{2}{(e^x)^2 - 1^2} = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{2}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \dfrac{e^x + 1 - 2}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$

Enfin : $\boxed{\text{si } x > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}}$

Ça, c'est dans le cas où $x > 0$. Que se passe-t-il sinon ? Faut-il distinguer deux autres cas $x < 0$ et $x = 0$. L'on pourrait se dire que pour $x < 0$, on pourrait reprendre l'expression de $S_n(x)$ obtenue précédemment, valable pour tout $x \neq 0$, et faire tendre n vers $+\infty$... Mais on voit poindre une forme indéterminée : $(e^{-x})^n$ et $(e^{-2x})^n$ tendront tous deux vers $+\infty$... Est-il vraiment utile de traiter le cas $x < 0$ à part du cas $x = 0$? Pas forcément, si l'on revient calmement à la toute-première expression de $S_n(x)$...

- Si $x \leq 0$: pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $-kx \geq 0$ et donc, par croissance de exp sur $\mathbb{R}$: $e^{-kx} \geq 1$.

Puis : $-2e^{-kx} \leq -2$, et ensuite : $1 - 2e^{-kx} \leq -1$.
En multipliant par e^{-kx} qui est positif, on obtient : $e^{-kx}(1 - 2e^{-kx}) \leq -e^{-kx} \leq -1$ (car $e^{-kx} \geq 1$)
En sommant pour $k \in [\![1; n]\!]$, on obtient : $S_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -1$. Autrement dit : $S_n(x) \leq -n$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$. Par théorème de comparaison, on peut enfin conclure :

$\boxed{\text{si } x \leq 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = -\infty}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com