Racines de l'unité et inclusion

Ayoub Hajlaoui

La flèche vers la droite : écriture runique ?
C'est l'esquisse adéquate pour un sens unique.

Énoncé : (temps conseillé : 15 minutes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$)

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m et n pour que $U_m \subset U_n$.

Correction :

Il est indispensable de savoir exprimer correctement les racines n-ièmes (ou m-ièmes) de l'unité...

$U_m = \{e^{i\frac{2k\pi}{m}},\ k \in [\![0; m-1]\!]\}$

Mettre $k \in \mathbb{Z}$ n'est pas faux en soi, mais pourquoi s'infliger une infinité d'inutiles répétitions...

$U_m \subset U_n \iff \forall k \in [\![0; m-1]\!],\ e^{i\frac{2k\pi}{m}} \in U_n \iff \forall k \in [\![0; m-1]\!],\ \left(e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)^n = 1$
$\iff \forall k \in [\![0; m-1]\!],\ e^{i\frac{2kn\pi}{m}} = 1$

À quoi cela équivaut-il ? Si continuer à raisonner par équivalence semble compliqué, on peut se mettre à raisonner par implication, et ainsi trouver une condition nécessaire pour que $U_m \subset U_n$, pour ensuite, réciproquement, montrer que ladite condition sera suffisante.
D'accord, mais que déduire de « $\forall k \in [\![0; m-1]\!],\ e^{i\frac{2kn\pi}{m}} = 1$ » ? Eh bien, simplement, on peut prendre n'importe quel k entre 0 et $m-1$, et l'égalité sera vraie... Quel k prendre en particulier ? $k = 0$ donne une égalité triviale ($1 = 1$). $k = 1$ est bien plus intéressant, mais, prudence ! Il faut pour cela avoir $1 \in [\![0; m-1]\!]$, c'est-à-dire $m - 1 \geq 1$, c'est-à-dire $m \geq 2$... Faisons donc une distinction de cas.

<u>Si $m \geq 2$</u>, si $U_m \subset U_n$, alors, en particulier (en prenant $k = 1$) : $e^{i\frac{2n\pi}{m}} = 1$

Mais nous savons exactement pour quels réels θ on a $e^{i\theta} = 1$... Et non, il n'y a pas que $\theta = 0$...

Donc $\dfrac{2n\pi}{m} \in 2\pi\mathbb{Z}$. Autrement dit, il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{2n\pi}{m} = 2K\pi$, c'est-à-dire tel que $\dfrac{n}{m} = K$. Donc m divise n.
À ce stade, nous avons donc montré l'implication (dans le cas $m \geq 2$) : $U_m \subset U_n \implies m$ divise n

« m divise n » est donc (toujours dans le cas $m \geq 2$) une condition ***nécessaire*** *pour que $U_m \subset U_n$... Serait-elle aussi une condition suffisante ?*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Réciproquement (toujours si $m \geq 2$) : si m divise n, alors il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $n = Km$.
On a alors, pour tout $k \in [\![0; m-1]\!]$, $\left(e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)^n = e^{i\frac{2kn\pi}{m}} = e^{i\frac{2kKm\pi}{m}} = e^{ikK\times 2\pi} = 1$ (car $kK \in \mathbb{Z}$).
Donc toute racine m-ième de l'unité est racine n-ième de l'unité. Autrement dit : $U_m \subset U_n$.

Dans le cas $m \geq 2$, on a donc l'équivalence : $U_m \subset U_n \Longleftrightarrow m$ divise n.

Si $m = 1$, on a, d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1 \subset U_n$. En effet : $U_1 = \{1\}$.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 1 divise n. L'équivalence ci-dessus reste donc vraie dans le cas $m = 1$.

Enfin, une condition nécessaire et suffisante sur n et m pour que $U_m \subset U_n$ est : « m divise n »

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com