cos, somme, produit

Ayoub Hajlaoui

Triomphez du produit, de la somme et des sin ;
la limite s'ensuit : sa valeur se dessine.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) *d'après CCINP PSI 2020*

1) Montrer que pour tout $t \in]0\ ;\ \pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$

2) Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$

3) En déduire, pour tout $t \in]0\ ;\ \pi[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$

Correction :

1) *« J'ai un truc à montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et je n'ai pas d'idée en particulier ». Voilà déjà de quoi me mettre sur la voie d'une récurrence. Ajoutons à cela que la formule à démontrer fait intervenir, au rang n, un produit de 1 à n, et donc qu'il sera relativement facile d'exprimer, en fonction de ce produit, le produit au rang $n+1$... C'est parti pour une récurrence.*
Mais juste avant, rassurons brièvement le correcteur sur le fait que le quotient du membre de droite est bien défini pour tout $t \in]0\ ;\ \pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geq 1$ donc (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$) : $\frac{1}{2^n} \leq 1$.

Donc, pour tout $t \in]0\ ;\ \pi[$, $0 < \frac{t}{2^n} \leq t < \pi$. D'où $\frac{t}{2^n} \in]0\ ;\ \pi[$, et donc $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$

Soit $t \in]0\ ;\ \pi[$. Soit, pour tout $n \geq 1$, la propriété P_n : « $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$ »

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, la propriété P_n est vraie.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$: d'une part, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^1}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

D'autre part, $\displaystyle\frac{\sin(t)}{2^1 \sin\left(\frac{t}{2^1}\right)} = \frac{\sin(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. Or, $\sin(t) = \sin\left(2 \times \frac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

Donc $\displaystyle\frac{\sin(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Autrement dit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^1 \sin\left(\frac{t}{2^1}\right)}$, et P_1 est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, P_n soit vraie, et montrons P_{n+1}.

Autrement dit, supposons : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$, et montrons : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)\right] \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \text{ d'après } P_n$$

Comment transformer cette expression pour arriver à $\dfrac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$ *? Plus précisément, qui transformer dans cette expression ? On ne touche pas au* $\sin(t)$*, qui nous convient parfaitement (se retrouve dans l'expression à obtenir), mais qui transformer de* $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$ *ou* $\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$ *?*

$\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{t}{2^n}\right)$*. Bof, que faire avec ça... Par contre, avec :* $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \sin\left(2 \times \frac{t}{2^{n+1}}\right)$*...*

On a donc : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \times 2 \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$

Enfin : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \times 2 \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$, et P_{n+1} vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

On a bien montré que pour tout $t \in]0\ ;\ \pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$

2) *Faut-il se servir de la question précédente, en utilisant le membre de droit de l'égalité obtenue précédemment, et en court-circuitant ainsi le produit ? À première vue, on pourrait se le dire. Mais dans l'optique d'une récurrence (sinon, quoi d'autre honnêtement...), on ne voit pas trop comment passer de* P_n *: «* $\displaystyle\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$ *» à* P_{n+1} *(à cause de cette somme assez horrible dont le terme général dépend de* n*, et qui fait figurer du* 2^{n-1} *en borne). Dès lors, on aurait tort de laisser tomber ce pauvre produit, pas si méchant en comparaison. « Alors quoi, la question 1 ne servirait à rien ? » Personne n'a dit ça. Si elle ne sert pas pour la 2, il y a toujours la question 3...*

Soit $t > 0$. Soit, pour tout $n \geq 1$, la propriété P_n : « $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$ »

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, la propriété P_n est vraie.

Initialisation : pour $n = 1$: d'une part, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

D'autre part, $\displaystyle\frac{1}{2^{1-1}} \sum_{k=1}^{2^{1-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1} t\right) = \cos\left(\frac{2-1}{2^1} t\right) = \cos\left(\frac{2-1}{2^1} t\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, P_n soit vraie, et montrons P_{n+1}.

Autrement dit, supposons : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$,

et montrons : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right)$

$$\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\left[\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)\right]\times\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)=\left[\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\right]\times\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\text{ d'après }\boldsymbol{P_n}$$

Et maintenant, que faire ? On n'a pas tant d'options que cela. Rentrons le $\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$ *dans la somme pour pouvoir faire intervenir une formule de trigonométrie... Tenez, par exemple* $\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$

Donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{4k-2}{2^{n+1}}t\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}\right)+\cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left[\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}\right)+\cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}\right)\right]$$

Déjà, relativement bonne nouvelle, l'apparition du $\frac{1}{2^n}$ *devant la somme...*
Ensuite, on peut constater que tous les entiers impairs peuvent s'écrire $4k-1$ *ou* $4k-3$ *(classes de congruences respectives de* -1 *et de* -3 *modulo* 4*, c'est-à-dire de* 3 *et de* 1 *modulo* 4*, les deux autres classes correspondant aux entiers pairs).*
Pour $1\leq k\leq 2^{n-1}$, $4\leq 4k\leq 2^{n+1}$ *et donc* $3\leq 4k-1\leq 2^{n+1}-1$*. De même,* $1\leq 4k-3\leq 2^{n+1}-3$*.*
Ainsi, lorsque k *parcourt* $[\![1;2^{n-1}]\!]$*, les* $4k-1$ *et* $4k-3$ *constituent l'ensemble des entiers impairs de* 1 *à* $2^{n+1}-1$*. Autrement dit, ils constituent les* $2p-1$ *(j'aurais pu dire les* $2p+1$ *mais jetez un œil à la somme que je veux obtenir) tels que* $1\leq 2p-1\leq 2^{n+1}-1$*. Ils constituent donc les* $2p-1$ *tels que* $2\leq 2p\leq 2^{n+1}$*, c-à-d enfin tels que* $1\leq p\leq 2^n$*... Ce qui nous fait retrouver la somme à obtenir. Mais voici une manière de le démontrer qui peut paraître plus conventionnelle, plus « propre »(et qui ne fait pas intervenir les congruences pour ceux qui ne les ont pas vues) :*

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}t\right)=\frac{1}{2^n}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\text{pair}}}^{2^n}\cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}t\right)+\sum_{\substack{k=1\\k\text{impair}}}^{2^n}\cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^n}\left[\sum_{p=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2\times 2p-1}{2^{n+1}}t\right)+\sum_{p=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2(2p-1)-1}{2^{n+1}}t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^n}\left[\sum_{p=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{4p-1}{2^{n+1}}t\right)+\sum_{p=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{4p-3}{2^{n+1}}t\right)\right]=\frac{1}{2^n}\left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}t\right)+\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}t\right)\right]$$

$=\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$ Donc $\boldsymbol{P_{n+1}}$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{P_n}$ est vraie.

On a bien montré que pour tout $t>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$

3) Soit $t\in\,]0\,;\,\pi[$. Les questions 1) et 2) nous permettent d'établir l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)=\frac{\sin(t)}{2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}\qquad(*)$$

Il s'agit donc probablement d'étudier la limite lorsque n *tend vers* $+\infty$ *du second membre (le premier, bien laid, faisant figurer une somme avec un terme général dépendant de* n *et un nombre de termes tendant vers* $+\infty$*...)*

Dans le second membre en question, n figure uniquement au dénominateur. Il suffit de déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$, mais comment ? Ah, c'est bon de connaître ses croissances comparées (et pas uniquement avec exp et ln...)

Rappelons : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = t \times \frac{2^n}{t} \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = t \times \frac{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}}$. ($t$ étant non nul)

Un petit changement de variable et le tour est joué... Attention, t est constant ici (les variables sont n et x).

Posons $x = \frac{t}{2^n}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, x tend vers 0. Donc : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}} = 1$

Puis, par produit de limites : $\lim_{n\to+\infty} t \times \frac{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}} = t$. Autrement dit : $\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = t$.

Par quotient de limites : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \frac{\sin(t)}{t}$

Enfin, l'égalité (*) établie précédemment nous permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) = \frac{\sin(t)}{t}}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com