Egalité d'ensembles de matrices

Ayoub Hajlaoui

Montrer que ceux de l'un doivent appartenir
à l'autre oui fort bien... Comment y parvenir ?

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0$.

On pose $F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $C = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ MF = FM\right\}$
Montrer que $C = \left\{\alpha F + \beta I_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$

Correction :

Commençons déjà par donner un nom à cet ensemble $\left\{\alpha F + \beta I_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$, dont nous voulons montrer qu'il est égal à C (ce que nous n'avons, bien sûr, pas encore établi)... Ceux qui ont déjà vu les espaces vectoriels reconnaîtront tout simplement Vect(F, I_2) en cet ensemble $\left\{\alpha F + \beta I_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$

Soit $A = \left\{\alpha F + \beta I_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$. Montrons que $A = C$.
Une manière classique de prouver une égalité entre deux ensembles est de procéder par double inclusion. Ici, une des deux inclusions est bien plus simple à montrer que l'autre...

Soit $M \in A$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $M = \alpha F + \beta I_2$.
On a alors $MF = (\alpha F + \beta I_2)F = \alpha F^2 + \beta F$ et $FM = F(\alpha F + \beta I_2) = \alpha F^2 + \beta F$
$MF = FM$ donc $M \in A$. On a donc montré : $\underline{A \subset C}$.

Soit maintenant $M \in C$. On a donc $MF = MF$.
Il s'agit donc de mettre en évidence deux réels α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha F + \beta I_2$. Comment procéder ? Explicitons les coefficients de M pour utiliser l'information $MF = MF$...

Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a donc : $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$
Autrement dit : $\begin{pmatrix} ax + by & -bx + cy \\ az + bt & -bz + ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bz & ay - bt \\ bx + cz & by + ct \end{pmatrix}$

D'où : $\begin{cases} ax + by = ax - bz \\ -bx + cy = ay - bt \\ az + bt = bx + cz \\ -bz + ct = by + ct \end{cases}$ Autrement dit : $\begin{cases} by = -bz \\ -bx + cy = ay - bt \\ az + bt = bx + cz \end{cases}$

Que faire de tout ça ? On sait que $b \neq 0$, donc on va pouvoir diviser par b dans la première équation. Et dans les deux dernières, j'ai envie de regrouper les termes qui contiennent du b, pour aussi diviser par b...

D'où : $\begin{cases} y = -z \\ b(t - x) = (a - c)y \\ b(t - x) = (c - a)z \end{cases}$ (les deux dernières lignes étant équivalentes car $y = -z$)

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Puis : $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -z \\ t-x & = & \dfrac{c-a}{b}z \end{array}\right.$ ou encore : $\left\{\begin{array}{rl} y = & -z \\ t = & \dfrac{c-a}{b}z+x \end{array}\right.$

Donc : $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -z \\ z & \dfrac{c-a}{b}z+x \end{pmatrix}$

J'aimerais écrire cette matrice comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{I_2}$. Or, les coefficients non diagonaux de $\boldsymbol{I_2}$ sont nuls, donc seule la matrice $\boldsymbol{F}$ peut « contribuer » aux coefficients non diagonaux de la matrice $\boldsymbol{M}$ (à savoir $-z$ et z)... Or, $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$. Donc nécessairement, $\alpha = \dfrac{z}{b}$ (avec, rappelons-le, b non nul). Ce qui nous donne l'idée du calcul suivant :

On a : $\boldsymbol{M} - \dfrac{z}{b}\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} x & -z \\ z & \dfrac{c-a}{b}z+x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{az}{b} & -z \\ z & \dfrac{cz}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\dfrac{az}{b} & 0 \\ 0 & x-\dfrac{az}{b} \end{pmatrix} = (x-\dfrac{az}{b})\boldsymbol{I_2}$

Ouf !

Donc $\boldsymbol{M} = \dfrac{z}{b}\boldsymbol{F} + (x-\dfrac{az}{b})\boldsymbol{I_2}$.

On a bien montré l'existence de deux réels α et β tels que $\boldsymbol{M} = \alpha\boldsymbol{F} + \beta\boldsymbol{I_2}$

Donc $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{A}$. On a montré : $\underline{\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A}}$.

$\boxed{\text{En conclusion : } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} = \left\{\alpha\boldsymbol{F} + \beta\boldsymbol{I_2},\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}}$