Équation différentielle et non-annulation

Ayoub Hajlaoui

Elle est non linéaire et sa résolution
de notre part requiert quelque imagination.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Déterminer toutes les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, et telles que $y' = 2y(1-y)$

Correction :

1) *Comme indiqué dans les deux petits vers en prélude, cette équation différentielle n'est même pas linéaire. Le cours ne nous est donc pas d'une grande aide, du moins pour l'instant... L'énoncé nous donne cependant une information cruciale : les fonctions y recherchées ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.*
Très souvent, lorsqu'il s'agit de résoudre une équation différentielle non linéaire, on pose un changement de variable (une nouvelle fonction en fonction de l'ancienne), en espérant tomber sur une équation différentielle que l'on saura mieux résoudre... Mais quelle nouvelle fonction poser ? L'énoncé l'indique parfois. Pas ici... On a donc, à première vue, l'embarras du choix. Mais y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Qu'est-ce que ça me donne envie de poser ?

Soit y une solution du problème posé. *On part sur de l'analyse-synthèse... On va trouver des conditions nécessaires sur y, mais il ne faudra pas oublier la partie synthèse, la partie « vérification » ...*

Soit z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z = \dfrac{1}{y}$ *Permis par la non-annulation de y sur $\mathbb{R}$*

z est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de telles fonctions) et $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$. Comme $y' = 2y(1-y)$, il s'ensuit : $z' = -\dfrac{2y(1-y)}{y^2} = -\dfrac{2y-2y^2}{y^2} = -\dfrac{2}{y} + 2$
Autrement dit : $z' = -2z + 2$ *(ou, si vous préférez, $z' + 2z = 2$...)*

z est donc solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, que l'on sait parfaitement résoudre.
Soit vous avez vu, en Terminale ou après, que les solutions de $y' = ay+b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y : t \longmapsto Ce^{at} - \dfrac{b}{a}$, avec C constante réelle, (ce qui revient absolument au même que de dire que les solutions de $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y : t \longmapsto Ce^{-at} + \dfrac{b}{a}$).
Soit vous revenez à la résolution de l'équation homogène associée $y' - ay = 0$, dont les solutions sont les $t \longmapsto Ce^{at}$, puis vous trouvez une solution particulière constante de $y' - ay = b$: vous trouverez $t \mapsto -\dfrac{b}{a}$, et en sommant la solution générale de l'équation homogène et la solution particulière de l'équation initiale, vous retrouverez le même résultat.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = Ce^{-2t} - \dfrac{2}{-2} = Ce^{-2t} + 1$

Mais attention, n'oublions pas que z n'est pas censé s'annuler sur $\mathbb{R}$!! (Etant l'inverse d'une fonction ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$). Et il y a des constantes C pour lesquelles $t \mapsto Ce^{-2t} + 1$ s'annule sur $\mathbb{R}$...

Supposons par l'absurde que $C < 0$: z est continue sur $\mathbb{R}$, et on a : $\lim\limits_{t \to -\infty} z(t) = -\infty$ (par composée et produit de limites) et $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = 1$
Or : $0 \in]-\infty\ ;\ 1[$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel t_0 tel que $z(t_0) = 0$, ce qui n'est pas !
Donc $C \geq 0$.

On a donc montré que si y est solution du problème posé, alors il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \dfrac{1}{Ce^{-2t} + 1}$

Réciproquement - *on passe à la partie synthèse* : soit $C \in \mathbb{R}_+$, et soit y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \dfrac{1}{Ce^{-2t} + 1}$.

y est <u>dérivable sur $\mathbb{R}$</u>, <u>ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$</u>, et on a $\forall y \in \mathbb{R}$:
d'une part, $y'(t) = \dfrac{2Ce^{-2t}}{\left(Ce^{-2t} + 1\right)^2}$
et d'autre part $2y(t)\big(1 - y(t)\big) = \dfrac{2}{Ce^{-2t} + 1} \times \left(1 - \dfrac{1}{Ce^{-2t} + 1}\right) = \dfrac{2(Ce^{-2t} + 1 - 1)}{\left(Ce^{-2t} + 1\right)^2} = \dfrac{2Ce^{-2t}}{\left(Ce^{-2t} + 1\right)^2}$
On a bien montré : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = 2y(t)\big(1 - y(t)\big)$. Autrement dit : $\underline{y' = 2y(1 - y)}$
y est donc solution du problème posé.

Nous pouvons enfin conclure que les solutions du problème posé sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y : t \longmapsto \dfrac{1}{Ce^{-2t} + 1}$, avec $C \in \mathbb{R}_+$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com