Majoration du terme général de la suite de Fibonacci

Ayoub Hajlaoui

Au puriste en puissance agressé dans son derme :
majoration au sens plus général du terme.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Soit la suite (f_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $f_0 = f_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$

Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Correction :

Deux remarques préliminaires :
• *les puristes diront « ce n'est pas la vraie suite de Fibonacci® ! » En effet, les premiers termes de la suite de Fibonacci sont* 0 *et* 1 *si l'on part de l'indice* 0*, et* 1 *et* 1 *si l'on part de l'indice* 1 *(merci wikipédia). La suite de cet exercice peut donc être considérée comme la suite de Fibonacci décalée d'un rang...*
• *le mot « majoration » dans le titre est à prendre au sens général du terme (au sens de majorer* u_n *par une autre expression), et pas au sens de « suite majorée » (par une constante).*
Rentrons maintenant dans le vif du sujet...

Ceux d'entre vous qui auront déjà vu en cours la manière d'obtenir le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 *(ce qui est le cas de la suite* f*) seront peut-être tentés de le faire (équation caractéristique tout ça tout ça...) pour ensuite essayer, à coups d'inégalités, d'obtenir le résultat voulu. C'est inutilement fastidieux, et ce n'est pas dit qu'on y arrive facilement avec le terme général de* (f_n)*... Une récurrence (double au vu de la définition de* f*) suffit !*

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $f_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ »
Montrons par récurrence double que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$ et $n = 1$: $f_0 = 1$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$, donc P_0 est vraie.
$f_1 = 1$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^1 = \frac{5}{3} \geq 1$, donc P_1 est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain entier naturel n, P_n et P_{n+1} soient vraies , et montrons que P_{n+2} est vraie.
Autrement dit, supposons : $f_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ et $f_{n+1} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$ et montrons : $f_{n+2} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$

$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$. *Comment arriver à : «* $\leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$ *» ?*

Or : $\left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(1 + \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{8}{3}$. *Espérons juste que* $\frac{8}{3} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^2$

Et $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} > \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

Donc (comme $\left(\frac{5}{3}\right)^n \geq 0$) : $\left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$. Enfin $f_{n+2} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$

Donc $\boldsymbol{P}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence (double) nous permet de conclure que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{P}_n$ est vraie.

Autrement dit : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } \boldsymbol{n},\ f_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n}$