Norme matricielle sous-multiplicative

Ayoub Hajlaoui

Questions d'un énoncé dansant dans tous les sens,
nous poussant à passer de produits à puissance.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min)

On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et O_2 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Par convention, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M^0 = I_2$
Soit C le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $C = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

1) Vérifier que C est stable par somme, par multiplication par un réel, et par produit matriciel, c'est-à-dire : $\forall M, N \in C,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ M + N \in C,\ \lambda M \in C$, et $MN \in C$

2) Pour tout M appartenant à C, avec $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, on pose $||M|| = |x| + |y|$. Montrer les propriétés suivantes *(qui font de $||.||$ ce qu'on appelle une norme sur C)* :
a) $\forall M \in C,\ ||M|| = 0 \iff M = O_2$ *(séparation)*
b) $\forall M \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda M|| = |\lambda|\ ||M||$ *(homogénéité)*
c) $\forall M, N \in C,\ ||M + N|| \leq ||M|| + ||N||$ *(inégalité triangulaire)*

3) Montrer : $\forall M, N \in C,\ ||MN|| \leq ||M||\ ||N||$

4) Montrer : $\forall M \in C, \forall n \in \mathbb{N},\ M^n \in C$ et $||M^n|| \leq ||M||^n$

Correction :

1) Soient $M, N \in C$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe quatre réels x, y, x', y' tels que $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ *Aucune raison que les x et les y des deux matrices soient les mêmes...*

On a alors : $M + N = \begin{pmatrix} x + x' & -y - y' \\ y + y' & x + x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' & -(y + y') \\ y + y' & x + x' \end{pmatrix}$ avec $x + x'$ et $y + y'$ deux réels. Donc $M + N \in C$.

De plus, $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda x & -\lambda y \\ \lambda y & \lambda x \end{pmatrix} \in C$ *(rien à dire ici, sinon rabâcher que $\lambda x, \lambda y \in \mathbb{R}$)*
Enfin, $MN = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -xy' - yx' \\ yx' + xy' & -yy' + xx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + yx') \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}$
Donc $MN \in C$.

On a bien montré : $\boxed{\forall M, N \in C,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ M + N \in C,\ \lambda M \in C, \text{ et } MN \in C}$

2)a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in C$. $||M|| = 0 \iff |x| + |y| = 0 \iff |x| = |y| = 0$ (car $|x|, |y| \geq 0$)
(une somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si ces deux réels sont nuls).

D'où : $||M|| = 0 \iff x = y = 0 \iff M = O_2$

On a bien montré : $\boxed{\forall M \in C,\ ||M|| = 0 \iff M = O_2.}$

2)b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in C$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda x & -\lambda y \\ \lambda y & \lambda x \end{pmatrix} \in C$

Donc $||\lambda M|| = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|\ |x| + |\lambda|\ |y| = |\lambda|\ (|x| + |y|) = |\lambda|\ ||M||$

On a bien montré : $\boxed{\forall M \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda M|| = |\lambda|\ ||M||}$

2)c) Soient $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ appartenant à C.

$M + N = \begin{pmatrix} x + x' & -(y + y') \\ y + y' & x + x' \end{pmatrix} \in C$, et $||M + N|| = |x + x'| + |y + y'|$

D'après l'inégalité triangulaire, $||M + N|| \leq |x| + |x'| + |y| + |y'| = |x| + |y| + |x'| + |y'|$

Autrement dit : $||M + N|| \leq ||M|| + ||N||$

On a bien montré : $\boxed{\forall M, N \in C,\ ||M + N|| \leq ||M|| + ||N||}$

3) Soient $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ appartenant à C.

$MN = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + yx') \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}$ *calcul déjà fait en 1), où on a montré $MN \in C$*

Donc $||MN|| = |xx' - yy'| + |xy' + yx'|$.

D'après l'inégalité triangulaire, $|xx' - yy'| \leq |xx'| + |yy'|$ et $|xy' + yx'| \leq |xy'| + |yx'|$

Je rappelle que l'inégalité triangulaire - oui, oui, toujours la première, la classique - donne (aussi) $|a - b| \leq |a| + |b|$... Ben oui, $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$
Attention à ne pas écrire des horreurs du style « $|a - b| \leq |a| - |b|$ »

Par suite, $||MN|| \leq |x|\ |x'| + |y|\ |y'| + |x|\ |y'| + |y|\ |x'|$

Il faudrait faire apparaître $||M|| \times ||N||$, mais si je ne le vois pas tout de suite, pas grave ! Voyez plutôt :

D'autre part, $||M|| \times ||N|| = (|x| + |y|)(|x'| + |y'|) = |x|\ |x'| + |x|\ |y'| + |y|\ |x'| + |y|\ |y'|$

On a donc bien montré : $\boxed{\forall M, N \in C,\ ||MN|| \leq ||M||\ ||N||}$

4) *On a démontré certaines propriétés de $||.||$ valables pour le produit, et on voudrait mettre en évidence des propriétés similaires pour la puissance... Récurrence, bien sûr.*

Soit $M \in C$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $M^n \in C$ et $||M^n|| \leq ||M||^n$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété P_n est vraie.

Initialisation : pour $n = 0$: $M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C$ (en prenant $x = 1$ et $y = 0$)

Par ailleurs, d'une part $||M^0|| = ||I_2|| = |1| + |0| = 1$, et d'autre part $||M||^0 = 1$. Donc $||M^0|| \leq ||M||^0$, et P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel n, P_n soit vraie, et montrons P_{n+1}.
Autrement dit, supposons : $M^n \in C$, $||M^n|| \leq ||M||^n$.
Et montrons : $M^{n+1} \in C$ et $||M^{n+1}|| \leq ||M||^{n+1}$

$M^{n+1} = M^n \times M$, avec $M \in C$ par hypothèse, et $M^n \in C$ par hypothèse de récurrence (P_n).
Donc d'après 1) *(où il a été prouvé que pour toutes matrices* M *et* N *de* C*, leur produit* MN *appartient à* C*)*, $\underline{M^{n+1} \in C}$
Et $||M^{n+1}|| = ||M^n \times M|| \leq ||M^n|| \times ||M||$ d'après 3).
Or, $||M^n|| \leq ||M||^n$ par hypothèse de récurrence, et $||M|| \geq 0$.
Donc $||M^n|| \times ||M|| \leq ||M||^n \times ||M||$, c'est-à-dire : $||M^n|| \times ||M|| \leq ||M||^{n+1}$
Enfin (par transitivité de la relation $\leq$) : $\underline{||M^{n+1}|| \leq ||M||^{n+1}}$.
P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence nous permet donc de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall M \in C, \forall n \in \mathbb{N},\ M^n \in C \text{ et } ||M^n|| \leq ||M||^n}$