Un calcul astucieux de limite

Ayoub Hajlaoui

Vers ce nombre j'avance entre deux rangs entiers
et réduis ma distance au moins de sa moitié.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in [0\ ;\ +\infty[$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

On admet que (u_n) est ainsi bien définie.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$

2) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

« On admet que (u_n) est ainsi bien définie » . Si l'énoncé m'avait demandé de le justifier, j'aurais procédé par récurrence et montré que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq -2$ (ce qui permet, dans l'étape d'hérédité, de justifier que u_{n+1} est bien défini). Mini-alternative : ou alors, j'aurais justifié que u_1 est bien défini, puis démontré par récurrence : pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

1) *Tenterais-je une récurrence ? Se lancer dans un tel raisonnement sans avoir essayé un calcul direct me semble prématuré. Par ailleurs, je ne vois pas comment on se débrouillerait simplement dans l'hérédité...*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| = |\sqrt{u_n + 2} - 2|$. *Que faire avec ça ? Je voudrais faire apparaître du $u_n - 2$. Peut-être qu'une quantité conjuguée...*

Donc $|u_{n+1} - 2| = \left|\dfrac{(\sqrt{u_n + 2} - 2)(\sqrt{u_n + 2} + 2)}{\sqrt{u_n + 2} + 2}\right|$ (expression permise car : $\sqrt{u_n + 2} + 2 \neq 0$)

D'où : $|u_{n+1} - 2| = \left|\dfrac{u_n + 2 - 4}{\sqrt{u_n + 2} + 2}\right| = \dfrac{|u_n - 2|}{\sqrt{u_n + 2} + 2}$ car $\sqrt{u_n + 2} + 2 > 0$

Ça y est, on a fait apparaître le $|u_n - 2|$ tant désiré ! Reste à montrer que le dénominateur est supérieur ou égal à 2...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{u_n + 2} \geq 0$ donc $\sqrt{u_n + 2} + 2 \geq 2$.

Ensuite, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{\sqrt{u_n + 2} + 2} \leq \dfrac{1}{2}$

Puis, comme $|u_n - 2| \geq 0$: $\dfrac{|u_n - 2|}{\sqrt{u_n + 2} + 2} \leq \dfrac{1}{2} \times |u_n - 2|$.

On a bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|}$

2) *Que faut-il faire ? Etudier les variations de* (u_n) *? Espérer montrer, en fonction de la monotonie obtenue (si monotonie il y a), qu'elle est majorée ou minorée pour montrer, par le théorème de convergence monotone, qu'elle est convergente ? Puis, une fois que c'est fait, déterminer sa limite par unicité de la limite* $(f(l) = l\ldots)$ *?*
C'est fastidieux, mais c'est peut-être ce qu'on aurait dû faire (avec probablement une distinction de cas en fonction de la valeur de u_0 *qui déterminerait la montonie de* (u_n)*...) s'il n'y avait pas la question 1.*

Mais la question 1... Ah, cette question 1 ! Elle nous a permis de montrer que pour tout entier naturel n*, la distance entre* u_{n+1} *et 2 est inférieure ou égale à la moitié de la distance entre* u_n *et 2... On se rapproche de plus en plus de deux, en réduisant au moins de moitié la distance à chaque étape...*

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Initialisation : pour $n = 0$: $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - 2| = |u_0 - 2|$, donc l'inégalité au sens large est vérifiée, et P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel n, P_n soit vraie, et montrons que P_{n+1} est vraie.
Autrement dit, supposons : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$ et montrons : $|u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 2|$
D'après 1), $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$, et d'après P_n, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$
Donc $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 2|$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie. Autrement dit : pour tout entier naturel n, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$

Et alors ? Et alors un petit coup de gendarmes...

Pour tout entier naturel n, $0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.
Et $-1 < \frac{1}{2} < 1$. Donc : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2| = 0$.

Puis, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} |u_n - 2| = 0$. Autrement dit : $\lim_{n \to +\infty} u_n - 2 = 0$

$\boxed{\text{En conclusion, } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com