Une expression plus simple qu'il n'y paraît

Ayoub Hajlaoui

Cherchons dans le passé proche ou plus éloigné
de ces nombres froissés quelque expression soignée.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si n est pair} \\ u_n + 1 & \text{si n est impair} \end{cases}$

Déterminer l'expression générale de u_n.

Correction :

1) *Ça semble compliqué à première vue... Qu'est-ce qui peut nous donner l'idée d'une telle expression ? Le calcul des premiers termes !*

$u_0 = 0$.
0 étant pair, $u_1 = u_{0+1} = 2u_{\frac{0}{2}} + 1 = 2u_0 + 1 = 1$. 1 étant impair, $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$
2 étant pair, $u_3 = u_{2+1} = 2u_{\frac{2}{2}}+1 = 2u_1+1 = 2+1 = 3$. 3 étant impair, $u_4 = u_{3+1} = u_3+1 = 3+1 = 4$

Je continue ou j'arrête ?

Nous pouvons conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = n$.

Il suffit maintenant de le montrer par récurrence sur n. Mais attention, quelle récurrence ? Vu que l'expression de u_{n+1} fait (parfois) intervenir $u_{\frac{n}{2}}$, une récurrence simple ne fera pas l'affaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, $\frac{n}{2}$ n'est en général pas le rang précédant $n+1$. On sait juste que c'est un rang compris entre 0 et n... D'où l'idée d'une récurrence forte.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $u_n = n$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$: $u_0 = 0$ par hypothèse, donc P_0 est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain entier naturel n, on ait, pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, P_k vraie, et montrons P_{n+1}.
Autrement dit, supposons : pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, $u_k = k$ et montrons : $u_{n+1} = n + 1$

Une disjonction de cas s'impose naturellement :
• si n est pair : $u_{n+1} = 2u_{\frac{n}{2}} + 1$, où $\frac{n}{2}$ est un entier appartenant à $[\![0;\ n]\!]$, donc, par hypothèse de récurrence forte $P_{\frac{n}{2}}$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}$. D'où : $u_{n+1} = 2 \times \frac{n}{2} + 1 = n + 1$
• si n est impair : $u_{n+1} = u_n + 1$ avec $n \in [\![0;\ n]\!]$, donc P_n vraie, c'est-à-dire : $u_n = n$. D'où $u_{n+1} = n + 1$.
Dans les deux cas, $u_{n+1} = n + 1$. Autrement dit, P_{n+1} est vraie.

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence forte nous permet donc de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Autrement dit : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = n}$