Application non injective et puissances

Ayoub Hajlaoui

Dobby cet elfe libre pour Noël achète
et veut ranger un nombre infini de chaussettes.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soit E un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x, y \in E,\ xy \in E$
Soit $a \in E$, et soit l'application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = a^n$
Montrer que φ n'est pas injective.

Correction :

1) *L'énoncé nous apprend en fait que E est stable par multiplication. (Tout produit de deux éléments de E est un élément de E). Mais du coup, si on prend un élément de E et qu'on l'élève à une puissance entière strictement positive... Une telle puissance ne serait qu'une succession de multiplications de cet élément par lui-même.*

Commençons par montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n \in E$.

Initialisation : pour $n = 1$: $a^1 = a \in E$ d'après l'énoncé.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, $a^n \in E$, et montrons que $a^{n+1} \in E$.
Autrement dit, supposons : $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$, et montrons : $\dfrac{1}{(k+1)!} \leq \dfrac{1}{2^k}$
$a^{n+1} = a^n \times a$, avec $a^n \in E$ (par hypothèse de récurrence) et $a \in E$ par hypothèse. Donc (en utilisant la stabilité de E par multiplication) $a^{n+1} \in E$.

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence nous permet donc de conclure que pour tout entier naturel non nul n, $a^n \in E$.

On a donc en fait montré : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) \in E$.

Or, E est fini ! Et $\mathbb{N}^*$ est infini. Il existe donc au moins deux entiers naturels non nuls n_1 et n_2 avec $n_1 \neq n_2$ tels que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$. $\boxed{\text{En conclusion, } \varphi \text{ n'est pas injective.}}$

Cette rédaction me semble suffisante. Si on vous demande plus de précisions - par exemple dans le contexte d'une colle - vous pouvez par exemple raisonner par l'absurde : soit $N = card(E)$ (nombre d'éléments de l'ensemble fini E). Supposons par l'absurde que φ est injective. Alors $\varphi(1), \varphi(2), ...\varphi(N+1)$ sont deux à deux distincts. Ce sont donc $N+1$ éléments, tous dans l'ensemble E, qui ne compte que N éléments. ABSURDE. Donc φ n'est en fait pas injective.