Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité en taille 2

Ayoub Hajlaoui

Un résultat classique et ce qui nous le donne
c'est le duo pratique Cayley-Hamilton.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle : $\mathrm{Tr}(M) = a + d$ et $\det(M) = ad - bc$

On note respectivement I_2 et O_2 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1) Montrer que $M^2 - \mathrm{Tr}(M)M + \det(M)I_2 = O_2$
2) Montrer que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$

Correction :

1) *Un simple calcul matriciel...*

$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}(M)M = \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}$

Et $\det(M)I_2 = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$.

Donc $M^2 - \mathrm{Tr}(M)M + \det(M)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ac+cd-ac-dc & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix}$

Nous avons bien montré : $\boxed{M^2 - \mathrm{Tr}(M)M + \det(M)I_2 = O_2}$

2) *Par défaut, procédons par double implication. L'implication la plus simple à démontrer me semble être : « si* $\det(M) \neq 0$*, alors* M *est inversible. (Parce que si* $\det(M) \neq 0$*, le cours nous donne l'idée d'une matrice à poser, dont on va vérifier qu'elle est effectivement l'inverse de* M*.)*

<u>Si $\det(M) \neq 0$</u>, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$, posons $N = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On a alors $NM = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} = I_2$

<u>M est donc inversible</u> (d'inverse N).

Réciproquement, <u>si M est inversible</u> : *attention, on ne sait pas à ce stade que* $ad - bc \neq 0$*, donc hors de question de dire que son inverse est la matrice* N *posée précédemment, et partir sur une pseudo-justification clownesque (qui se mord en fait la queue) en mode « ben vous voyez, si cette matrice existe, c'est bien qu'on a le droit de poser* $\dfrac{1}{ad-bc}$ *et donc que* $ad - bc \neq 0$ *» ... Par contre, on a bien le droit de parler de l'inverse de* M*, dont on a supposé l'existence.*

Mais comment accéder à $\det(M)$ *? Ne l'avons-nous pas justement croisé à la question 1 ?*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

D'après 1), $\boldsymbol{M}^2 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{M} + \det(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{O}_2$.

Peut-être multiplier cette égalité par $\boldsymbol{M}^{-1}$, mais ça ferait coexister du $\boldsymbol{M}$ et du $\boldsymbol{M}^{-1}$ dans l'égalité.. Tout ça à cause de $\det(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_2$, qui devient $\det(\boldsymbol{M})\boldsymbol{M}^{-1}$ après multiplication par $\boldsymbol{M}^{-1}$. Mais sans ce terme, ce serait mieux... Ben tiens, supposons par l'absurde $\det(\boldsymbol{M}) = 0$

Supposons par l'absurde $\det(\boldsymbol{M}) = 0$. On a alors : $\boldsymbol{M}^2 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{M} = \boldsymbol{O}_2$

D'où : $\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{M}^2 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{O}_2$. Donc $\boldsymbol{M} - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{O}_2$. Ou encore : $\boldsymbol{M} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_2$

Mais que faire de cette égalité ? Où est l'absurdité ? Attention à ne pas la forcer, en faisant semblant de voir quelque chose d'absurde pour plier la question...

Posons $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors (d'après l'égalité précédente) : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$

D'où : $a = a + d$ (c'est-à-dire $d = 0$), $b = c = 0$, et $d = a + d$ (c'est-à-dire $a = 0$).

Donc $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{O}_2$, qui n'est évidemment pas inversible.

Et si on me demande pourquoi, on aurait (en cas d'inversibilité de $\boldsymbol{M}$) $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{O}_2 \times \boldsymbol{M}^{-1}$ $= \boldsymbol{O}_2 \neq \boldsymbol{I}_2$...

Notre supposition de départ ($\det(\boldsymbol{M}) = 0$) était donc fausse. Donc $\underline{\det(\boldsymbol{M}) \neq 0.}$

Nous avons bien montré : $\boxed{\boldsymbol{M} \text{ inversible si et seulement si } \det(\boldsymbol{M}) \neq 0.}$