# Diamètre d'une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$

Ayoub Hajlaoui

*Donnez un chocolat, un biscuit un Oscar*
*à qui révélera le sup de nos écarts*

**Énoncé :** (temps conseillé : 30 min)

Soit $A$ une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Soit $B = \left\{ |x-y|,\ x, y \in A \right\}$
1) Montrer que $B$ admet une borne supérieure.
2) Montrer que $\sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A)$
3) Montrer : $\forall \epsilon > 0,\ \exists (x, y) \in A^2,\ |x-y| > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$
4) Que peut-on en conclure ?

**Correction :**

1) *La plupart d'entre vous penseront à montrer que la partie* $B$ *est majorée, mais n'oubliez surtout pas de montrer qu'elle est non vide !*

$A$ étant une partie non vide de $\mathbb{R}$, il existe un réel $x$ appartenant à $A$. Donc, par définition de $B$, $|x-x| \in B$. Autrement dit, $0 \in B$, et $B$ est non vide.
De plus, $A$ étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in A$, $|x| \leq M$

*Attention, ici, à l'erreur fréquente d'inverser le « il existe » et le « quel que soit » .*
*« Quelque soit* $x \in A$*, il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|x| \leq M$ *» serait ennuyeusement trivial, et ne caractériserait pas spécifiquement une partie bornée. En effet, cette proposition permet au* $M$ *de dépendre du* $x$*, et il suffit dès lors de prendre, trivialement* $M = |x|$*...*

Dès lors : pour tous $x, y \in A$, $|x-y| \leq |x| + |y|$ par inégalité triangulaire. Et $|x| + |y| \leq 2M$.
Donc $|x-y| \leq 2M$.
Autrement dit, pour tout $z \in B$, $|z| \leq 2M$. La partie $B$ est donc majorée (par $2M$).

$B$ étant une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, le théorème de la borne supérieure nous permet de conclure que $\boxed{B \text{ admet une borne supérieure.}}$

2) *Ne pas se laisser désarçonner par tous ces sup et ces inf...* $\sup(A) - \inf(A)$ *est un réel comme un autre, et il suffit de montrer que tout élément de* $B$ *est inférieur ou égal à ce réel, pour ensuite « passer au sup » ...*
*Par ailleurs, sup(A) et inf(A) sont bien définis car* $A$ *est non vide bornée (majorée et minorée).*

Soit $z \in B$. Il existe $x, y \in A$ tels que $z = |x-y|$. *Distinguons les cas pour nous débarrasser de cette valeur absolue...*
• Si $x \geq y$, $z = x - y$. Or $x \leq \sup(A)$ et $y \geq \inf(A)$ d'où $-y \leq -\inf(A)$. Donc $x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$
*Prudence, on a sommé (et surtout pas fait la différence de) deux inégalités.*
Donc $z \leq \sup(A) - \inf(A)$.
• Si $x < y$, $z = y - x$, avec $y \leq \sup(A)$ et $z \geq \inf(A)$. On obtient, de même que pour le cas précédent, $z \leq \sup(A) - \inf(A)$

*On aurait aussi pu éviter la distinction de cas en écrivant* $z = \max(x, y) - \min(x, y)$, *avec* $\max(x, y) \in A$ *et* $\min(x, y) \in A$

Nous avons donc montré : $\forall z \in \boldsymbol{B},\ z \leq \sup(A) - \inf(A)$
$\sup(A) - \inf(A)$ est donc un majorant de $\boldsymbol{B}$. Or, par définition, $\sup(\boldsymbol{B})$ est le plus petit majorant de $\boldsymbol{B}$. Nous pouvons donc en conclure : $\boxed{\sup(\boldsymbol{B}) \leq \sup(A) - \inf(A).}$

3) *Si on connaît bien notre cours, ce epsilon nous fait penser à une propriété de la borne supérieure (de* $\boldsymbol{B}$ *ici, étant donné que* $|x-y| \in \boldsymbol{B}$*)... On pourrait donc se demander s'il ne faudrait pas prouver (par un autre moyen que cette caractérisation, du coup) que* $sup(A) - \inf(A) = \sup(\boldsymbol{B})$*, puis en conclure cette inégalité avec epsilon... Mais un petit coup d'oeil à la question suivante nous fait dire que non. Dire « $\sup(\boldsymbol{B}) = \sup(A) - \inf(A)$ » serait justement notre conclusion en 4). Il nous faut donc prouver 3) « à la main »...*

Par définition de $\sup(A)$, on a : $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > \sup(A) - \epsilon$
On a donc aussi : $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > \sup(A) - \dfrac{\epsilon}{2}$
*Cela nous est permis par le* $\forall \epsilon > 0$ *(d'où l'importance des quantificateurs...) D'accord, mais pourquoi introduire ce* $\dfrac{\epsilon}{2}$ *? Peut-être en vue de l'additionner à un autre* $\dfrac{\epsilon}{2}$*...*

Et, par définition de $\inf(A)$, on a : $\forall \epsilon > 0,\ \exists y \in A,\ y < \inf(A) + \dfrac{\epsilon}{2}$
Autrement dit : $\forall \epsilon > 0,\ \exists x, y \in A,\ x > \sup(A) - \dfrac{\epsilon}{2}$ et $-y > -\inf(A) - \dfrac{\epsilon}{2}$
D'où : $\forall \epsilon > 0,\ \exists x, y \in A,\ x - y > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$ *Quid de la valeur absolue ?*

*Oui, je sais, la valeur absolue d'un réel est égale à ce réel s'il est positif, et à son opposé s'il est négatif. Autrement dit, la valeur Mais du coup (et on l'oublie souvent même si c'est évident), la valeur absolue d'un réel est toujours supérieure ou égale à ce réel.*

Nous avons donc montré : $\forall \epsilon > 0,\ \exists x, y \in A,\ |x - y| \geq x - y > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$
Et enfin : $\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists (x, y) \in A^2,\ |x - y| > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon}$

*Au lieu de se trimballer* $\forall \epsilon ..., \forall \epsilon ..., \forall \epsilon ...$, *on aurait pu introduire (sans lui donner de valeur précise bien évidemment) un epsilon strictement positif quelconque dès le début et raisonner pour ce epsilon fixé. Une fois justifiée l'existence d'un couple* $(x, y)$ *convenable de* $\boldsymbol{A}^2$*, on aura bien prouvé le résultat pour tout* $\epsilon > 0$*. À titre personnel, rappeler* $\forall \epsilon ...$ *à chaque fois me plait pas mal, d'autant plus que je ne fais que copier-coller en LaTeX...*

4) Dit autrement (*on me reproche de dire souvent « autrement dit », et bien voici comment dire autrement « autrement dit » , bref je vous ai perdus, revenons à nos moutons*), le résultat de la 3) est le suivant : $\forall \epsilon > 0,\ \exists z \in \boldsymbol{B},\ z > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$
En rajoutant le fait que $\sup(\boldsymbol{B})$ est un majorant de $\boldsymbol{B}$ :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists z \in \boldsymbol{B},\ \sup(\boldsymbol{B}) \geq z > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$

En court-circuitant ce $z$ qui nous a bien servi mais qui a fait son temps *(la République des Fusibles)*, on a en fait montré : $\forall \epsilon > 0,\ \sup(\boldsymbol{B}) > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$
Puis, en faisant tendre $\epsilon$ vers $0$ dans cette inégalité (qui se conserve donc **au sens large**) : $\sup(\boldsymbol{B}) \geq \sup(A) - \inf(A)$. De plus, d'après 2), $\sup(\boldsymbol{B}) \leq \sup(A) - \inf(A)$

En conclusion : $\boxed{\sup(\boldsymbol{B}) = \sup(A) - \inf(A)}$

*On donne à cette quantité le nom - relativement intuitif, ce me semble - de diamètre de la partie* $\boldsymbol{A}$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com