Fonction croissante et extension d'une égalité de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$

Ayoub Hajlaoui

Une fonction laissant tout nombre rationnel invariant et croissante.... Que fait-elle aux réels ?

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

1) On note E la fonction partie entière. Soit un réel x. On définit les suites (u_n) et (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{E(x \times 10^n)}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{E(x \times 10^n) + 1}{10^n}$. Déterminer les limites de (u_n) et (v_n).

2) Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ croissante et telle que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$

Correction :

1) *Ce que nous savons principalement de la fonction partie entière est cet encadrement, valable pour tout réel y : $y - 1 < E(y) \leq y$. La suite est assez prévisible...*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x \times 10^n - 1 < E(x \times 10^n) \leq x \times 10^n$. Donc (comme $10^n > 0$) :
$x - \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{E(x \times 10^n)}{10^n} \leq x$. Autrement dit : $x - \dfrac{1}{10^n} < u_n \leq x$.
Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} x - \dfrac{1}{10^n} = x$. Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x}$
De même : $x \times 10^n < E(x \times 10^n) + 1 \leq x \times 10^n + 1$, puis $x < v_n \leq x + \dfrac{1}{10^n}$ et enfin : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x}$

2) *On aurait bien aimé que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Et là, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on aurait obtenu le résultat directement... Mais l'énoncé ne nous dit pas que f est continue. On sait « juste » qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}$. Comment utiliser cette croissance de f ? Il faudrait faire intervenir des inégalités... Peut-être utiliser les suites (u_n) et (v_n) à cet effet ?*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies en 1). Nous avons montré (au cours de 1) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq x$ et $x < v_n$. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq x < v_n$.

Et là, on va pouvoir se servir de la croissance de f sur $\mathbb{R}$!

f étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc : $f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n)$.
Or, u_n et v_n appartiennent à $\mathbb{Q}$. En effet, $u_n = \dfrac{E(x \times 10^n)}{10^n}$ avec $E(x \times 10^n) \in \mathbb{Z}$ et $10^n \in \mathbb{Z}^*$ (et même justification pour v_n).
Donc, par hypothèse, $f(u_n) = u_n$ et $f(v_n) = v_n$. L'encadrement précédent s'écrit donc :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq f(x) \leq v_n$ *Un passage à la limite en se servant du résultat de 1), et c'est réglé !*

De plus, d'après 1), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x$. Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = x$. Autrement dit (puisque $f(x)$ ne dépend pas de n) : $f(x) = x$.
Nous avons bien montré : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com