Application sur un espace de fonctions et intégrales

Ayoub Hajlaoui

Partant d'une fonction, obtenir son image
si l'on fait attention se fera sans dommage.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) *D'après ESSEC ECS 2003 Maths 1*

Soit $\boldsymbol{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit l'application $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E}$ ainsi définie : $\forall f \in \boldsymbol{E},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

1) $\boldsymbol{\Phi}$ est-elle injective ? Surjective ?

2) Soit $\lambda > 1$. Déterminer l'ensemble des fonctions f bornées de $\boldsymbol{E}$ telles que $\Phi(f) = \lambda f$

Correction :

1) *À ce stade de l'année, vous n'avez peut-être pas entendu parler d'endomorphismes... On prouve simplement que $\boldsymbol{\Phi}$ est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$, c'est-à-dire une application linéaire de $\boldsymbol{E}$ dans lui-même. Le cours nous dit alors que $\boldsymbol{\Phi}$ est injective si et seulement si son noyau Ker $\boldsymbol{\Phi}$ (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\boldsymbol{E}$ dont l'image par $\boldsymbol{\Phi}$ est la fonction nulle de $\boldsymbol{E}$) est réduit à la fonction nulle de $\boldsymbol{E}$. Mais si on n'a pas encore vu les endomorphismes, que faire ? Soit partir sur une démonstration de l'injectivité de $\boldsymbol{\Phi}$, soit sentir qu'elle n'est pas injective et trouver deux fonctions de $\boldsymbol{E}$ différentes qui ont la même image par $\boldsymbol{\Phi}$...*

Quelle intuition pourrait-on avoir ici ? $\boldsymbol{\Phi}$ associe, à toute fonction f de $\boldsymbol{E}$, une fonction $\Phi(f)$ définie à l'aide d'une intégrale sur un intervalle de longueur 1. Il me semble, dès lors, que l'on peut trouver deux fonctions f et g différentes de $\boldsymbol{E}$ telles que $\Phi(f) = \Phi(g)$

Soit f la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. f appartient bien à $\boldsymbol{E}$, et $\Phi(f) = f$
En effet : $\forall x \in \boldsymbol{E},\ \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$

Peut-on trouver une autre fonction g de $\boldsymbol{E}$ telle que $\Phi(g) = f$? Il suffit que g vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{x-1}^{x} g(t)\ dt = 0$. Une fonction 1-périodique d'intégrale nulle sur une période conviendrait !

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos\big(2\pi x\big)$. g est continue sur $\mathbb{R}$, donc $g \in \boldsymbol{E}$
J'ai pensé à cette fonction qui est 1-périodique parce que cos est 2π-périodique, et dont l'intégrale est nulle sur une période (sur n'importe quel intervalle de longueur 1), parce que cos est d'intégrale nulle sur sa période (sur n'importe quel intervalle de longueur 2π)...

Pour tout $x \in \mathbb{R},\ \Phi(g)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_{x-1}^{x} = \frac{1}{2\pi}\big(\sin(2\pi x) - \sin(2\pi(x-1))\big)$
$= \dfrac{1}{2\pi}\big(\sin(2\pi x) - \sin(2\pi x - 2\pi)\big) = 0$ par 2π-périodicité de sin. Donc $\Phi(g) = f = \Phi(f)$.

$f, g \in \boldsymbol{E}$ avec $f \neq g$, et $\Phi(f) = \Phi(g)$. Nous pouvons en conclure que $\boxed{\boldsymbol{\Phi} \text{ n'est pas injective.}}$

Quid de la surjectivité ? Est-ce que tout élément de l'espace d'arrivée - autrement dit est-ce que toute fonction de $\boldsymbol{E}$ - admet un antécédent dans l'espace de départ ($\boldsymbol{E}$ également) par l'application $\boldsymbol{\Phi}$?
Dans ce genre de situation, il est pertinent de se demander si, pour une fonction g de $\boldsymbol{E}$, être l'image d'une fonction f de $\boldsymbol{E}$ par $\boldsymbol{\Phi}$ impose des conditions nécessaires supplémentaires (en plus du fait que g soit continue sur $\mathbb{R}$). Si oui, cela voudrait dire que les fonctions de $\boldsymbol{E}$ n'admettent pas toutes des antécédents par $\boldsymbol{\Phi}$, et donc que $\boldsymbol{\Phi}$ ne serait pas surjective.

Pour toute fonction f de $\boldsymbol{E}$, $\Phi(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'affirmer que $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
Si on n'a pas vu ce théorème, ou du moins pas sous ce nom très cérémonieux, il suffit de se rappeler que, par définition de l'intégrale, en notant $\boldsymbol{F}$ une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (dont l'existence est garantie par la continuité de f sur $\mathbb{R}$), on a, pour tout réel x, $\Phi(f)(x) = F(x) - F(x-1)$. Et on retrouve aisément (par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) que $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\Phi(\boldsymbol{E})$ (ensemble des images par $\boldsymbol{\Phi}$ des fonctions de $\boldsymbol{E}$) est donc inclus dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il est donc strictement inclus dans $\boldsymbol{E}$, et ne peut être égal à $\boldsymbol{E}$. $\boxed{\boldsymbol{\Phi} \text{ n'est donc pas surjective.}}$

Une autre formulation du même propos : il existe des fonctions de $\boldsymbol{E}$ qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ces fonctions n'ont pas d'antécédent par $\boldsymbol{\Phi}$, et $\boldsymbol{\Phi}$ n'est donc pas surjective.

2) *C'est typiquement le genre de question pour lequel un raisonnement par analyse-synthèse semble approprié.*
Soit f une telle fonction (c-à-d une fonction bornée de $\boldsymbol{E}$). f est donc une application continue sur $\mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$, et pour tout réel x, $\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$

Que faire d'une telle égalité, et de l'inégalité avec $\boldsymbol{M}$? Comment les combiner intelligemment ?
L'inégalité triangulaire (cas des intégrales) donne, pour tout réel x, $\left|\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_{x-1}^{x} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$

Donc, pour tout réel x, $\left|\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_{x-1}^{x} M\,\mathrm{d}t = M$ *(intégration d'une constante sur un intervalle de longueur 1)*
Autrement dit (d'après l'hypothèse $\Phi(f) = \lambda f$) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda|f(x)| \leq M$

Et alors ? Eh bien, nous avons une majoration encore plus fine de $|f|$!
Autrement dit (comme $\lambda \neq 0$) : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq \dfrac{M}{\lambda}$

On peut réitérer, à souhait, le raisonnement précédent en remplaçant le majorant M par $\dfrac{M}{\lambda}$...
Il s'ensuit, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |f(x)| \leq \dfrac{M}{\lambda^n}$
Parler de récurrence immédiate me semble tout à fait raisonnable ici. Si vous voulez le détail de la récurrence, vous le retrouverez dans cette vidéo (sur ma chaîne youtube).

Or (comme $\lambda > 1$) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{\lambda^n} = 0$. Le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |f(x)| = 0$. Autrement dit : pour tout réel x, $f(x) = 0$. f est donc la fonction nulle.
Réciproquement (synthèse), si f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, f est bornée et vérifie trivialement $\Phi(f) = \lambda f$.
En conclusion, $\boxed{\text{la fonction nulle est l'unique fonction bornée de } E \text{ vérifiant } \Phi(f) = \lambda f}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com