Moyennes de Cesàro d'une suite monotone

Ayoub Hajlaoui

Cet exercice peut se résumer ainsi :
lorsque croissent tes notes ta moyenne aussi.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle, et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$
Montrer que si (u_n) est monotone, alors (v_n) l'est aussi et a les mêmes variations que (u_n).

Correction :

Une suite monotone, c'est une suite croissante ou décroissante. Dès lors, il semble naturel de faire une distinction de cas suivant la monotonie de (u_n)

• Si (u_n) est croissante : pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

La bonne vieille recette du signe de la différence, mais que faire avec cette quantité ? Peut-être expulser le terme que la première somme a en trop par rapport à la seconde ? Histoire de faire apparaître la même somme...

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\Big) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big)\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{u_{n+1}}{n+1}$

$= -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\Big(-\sum_{k=1}^{n} u_k + nu_{n+1}\Big)$

Je veux le signe, et j'ai donc factorisé par $\frac{1}{n(n+1)}$ *pour espérer y voir plus clair. Mais que faire de* $-\sum_{k=1}^{n} u_k + nu_{n+1}$ *? Ne nous laissons pas avoir par des considérations sur le signe de* (u_n)*, qui n'auraient pas grand-chose à faire ici... Si je pouvais « compacter » un peu l'écriture de* $-\sum_{k=1}^{n} u_k + nu_{n+1}$ *... Pour ce faire, une astuce sympa serait de voir* nu_{n+1} *comme une somme !*

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)}\Big(-\sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} u_{n+1}\Big)$

Il est bien plus facile, en partant de $\sum_{k=1}^{n} K$*, de trouver* nK*, que de voir* nK *comme* $\sum_{k=1}^{n} K$*...*

Puis, par linéarité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \big(u_{n+1} - u_k\big)$

Et alors, sommes-nous mieux avancés ? Largement ! Du moins, si l'on se souvient de nos hypothèses et de ce qu'elles impliquent...

(u_n) étant croissante, on a, pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $u_{n+1} \geq u_k$. Donc $u_{n+1} - u_k \geq 0$.

Par somme de réels positifs, on en déduit : $\sum_{k=1}^{n} \big(u_{n+1} - u_k\big) \geq 0$. Et enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \geq 0$.

La suite (v_n) est donc croissante.

• <u>Si (u_n) est décroissante</u> : on a toujours, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(u_{n+1} - u_k\right)$

Et cette fois-ci, (u_n) étant décroissante, on a, pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $u_{n+1} \leq u_k$. Donc $u_{n+1} - u_k \leq 0$.

Par somme de réels négatifs, on en déduit : $\sum_{k=1}^{n} \left(u_{n+1} - u_k\right) \leq 0$. Et enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \leq 0$

La suite (v_n) est donc décroissante.

Nous avons bien montré ce qui suit :

si (u_n) est monotone, alors (v_n) aussi, et, dans ce cas, elles ont les mêmes variations.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com