Une somme rigolote

Ayoub Hajlaoui

Loin d'être l'ennemi, ce carré d'ornement
élégant simplifie nos vies énormément.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Correction :

Si vous vous êtes pas mal entraîné sur le calcul de somme, peut-être auriez-vous préféré ne pas avoir de carré en exposant dans le terme général de cette somme-ci... Peut-être seriez-vous tenté calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$*, à l'aide probablement d'un passage en complexes. Vous exfiltreriez (ouh c'est dur à dire à l'oral) ensuite le carré à l'extérieur de la somme, et écririez une horreur, à savoir que cette somme des carrés est égale au carré de la somme des cos (ouh que c'est dur à lire à l'écrit...)*

Amalgamer ainsi somme des carrés et carré des sommes (et plus généralement, amalgamer somme des produits $a_k b_k$ et produit de la somme des a_k et de la somme des b_k, cf par exemple cette vidéo de ma chaîne youtube pour lever la confusion) est une grosse bêtise que peu d'élèves aguerris commettraient. Mais l'erreur devient autrement plus tentante, et on fait moins attention à la distinction, lorsqu'on a l'impression d'avoir vu, de la part de l'énoncé, un clin d'œil en direction d'une somme que nous savons déjà calculer. Ce clin d'œil charmeur mais imaginaire nous fait tout oublier. Il nous fait même passer à côté de l'œillade, bien réelle celle-ci, jetée par une méthode peut-être plus simple...

Je vois du $\frac{\pi}{2}$ *à l'intérieur du* $\cos^2$*. Ca me fait penser au fait que* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$*... (et le carré sera évidemment mis par-dessus). Mais comment faire apparaître du* $\frac{\pi}{2} - ...$ *dans le cosinus de la somme ? Je ne vois pas comment faire, à part un changement d'indice. Et pas n'importe lequel ! Une inversion du style $j = n - k$, pour faire apparaître ce fameux signe $-$. Essayons-le, justement.*

En effectuant le changement d'indice $j = n - k$ (donc $k = n - j$) :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{j=0}^{n} \cos^2\left(\frac{(n-j)\pi}{2n}\right)$$

Certes, $n - 0 = n$ et $n - n = 0$, mais attention à bien mettre $j = 0$ en bas et n en haut, ce n'est pas comme pour les intégrales

Donc : $S_n = \sum_{j=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{2n}\right) = \sum_{j=0}^{n} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

(simple changement de nom de ma variable muette)

J'ai troqué ma somme initiale $\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ *pour* $\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$*. La belle affaire ! Je pourrais être tenté de baisser les bras en me disant que j'ai perdu mon temps... Mais non !* $\cos^2$ *et* $\sin^2$*, bon sang !*

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

Nous pouvons finalement en conclure : $\boxed{S_n = \frac{n+1}{2}}$