Inverse d'une matrice complexe et racine n-ième de l'unité

Ayoub Hajlaoui

À coup d'essais précieux les problèmes s'abattent.
La chance aux audacieux sourit et même en maths.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :
$\forall k, j \in [\![1;n]\!],\ [M]_{k,j} = \omega^{(k-1)(j-1)}$ (où $[M]_{k,j}$ est le coefficient de M en k-ième ligne et j-ième colonne)

Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

Correction :

On peut essayer d'expliciter M pour voir... Flemme de l'écrire ici, mais vous obtiendrez des puissances de ω qui varient en fonction de la ligne et de la colonne (merci Captain Obvious). En quoi cela m'aiderait-il à montrer que M est inversible ? Peut-être un pivot de Gauss pour ceux qui l'ont déjà vu, ou autres opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes... Je n'exclus pas que ça puisse marcher, mais ça ne me dit rien qui vaille...

Et si j'arrivais plutôt à « trouver » une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $MN = I_n$? Ce serait génial, et je ferais d'une pierre deux coups (j'aurais directement que M est inversible d'inverse N).

D'accord, mais comment trouver une telle matrice ? Forçons le destin et préjugeons des coefficients qu'elle pourrait bien avoir « pour que ça marche ». Si l'on définit clairement les coefficients d'une matrice carrée N, puis que l'on montre $MN = I_n$, personne ne pourra nous reprocher quoi que ce soit au niveau de la rédaction...

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\forall k, j \in [\![1;n]\!],\ [MN]_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} [M]_{k,l}[N]_{l,j}$

Oui, je connais ma formule des $[A]_{i,k}\ [B]_{k,j}$, mais j'ai dû la réadapter vu les indices de l'énoncé...
On voudrait : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ [MN]_{k,k} = 1$ et $\forall k, j \in [\![1;n]\!]$, si $k \neq j$, $[MN]_{k,j} = 0$
Autrement dit, on voudrait :

- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \sum_{l=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-1)}[N]_{l,k} = 1$
- $\forall k, j \in [\![1;n]\!]$, si $k \neq j$, $\sum_{l=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-1)}[N]_{l,j} = 0$

Commençons par nous demander quel choix « simple » on peut faire des $[N]_{l,k}$ pour que les sommes de la première condition soient égales à 1... C'est plus simple que pour la deuxième condition, même si nous n'avons aucune garantie que les coefficients obtenus pour satisfaire la première satisferont la deuxième. Pour être honnête avec vous, je dois avoue que j'ai une petite idée derrière la tête : prendre les $[N]_{l,k}$ tels que tous les termes des sommes de la première condition soient égaux à 1 à un facteur près (ce seraient donc aussi des puissances de ω). En espérant que cela fasse apparaître, en deuxième condition, des sommes géométriques qui me feraient intervenir des racines n-ièmes de l'unité, et qui me donneraient 0...

Posons : $\forall l, k \in [\![1;n]\!]$, $[N]_{l,k} = \frac{1}{n} \times \omega^{-(k-1)(l-1)} = \frac{1}{n} \times \omega^{(1-k)(l-1)}$

On a alors : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ [MN]_{k,k} = \sum_{l=1}^{n} \ \omega^{(k-1)(l-1)}[N]_{l,k} = \sum_{l=1}^{n} \ \omega^{(k-1)(l-1)} \times \frac{1}{n} \times \omega^{(1-k)(l-1)}$

Autrement dit : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ [MN]_{k,k} = \sum_{l=1}^{n} \ \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$

Ca marche bien pour les coefficients diagonaux ! Et pour les autres ?

$\forall k, j \in [\![1;n]\!]$, si $k \neq j$, $[MN]_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} \ [M]_{k,l}[N]_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} \ \omega^{(k-1)(l-1)}[N]_{l,j}$

$= \sum_{l=1}^{n} \ \omega^{(k-1)(l-1)} \times \frac{1}{n} \times \omega^{(1-j)(l-1)} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \ \omega^{(k-1)(l-1)+(1-j)(l-1)} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \ \omega^{(k-j)(l-1)}$

Que faire avec ça ? Pour commencer, remarquer qu'en exposant, il y a un produit de deux termes, dont l'un, $(k-j)$, ne dépend pas de l'indice de sommation l...

D'où : $[MN]_{k,j} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \ \left(\omega^{k-j}\right)^{l-1} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \ \left(\omega^{k-j}\right)^{l}$ *(petit changement d'indice)*

On reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, et on a envie de dégainer la formule, mais d'abord, il faut s'assurer que la raison ω^{k-j} n'est pas égale à 1...

k et j sont deux éléments de $[\![1;\ n]\!]$, et $k \neq j$. Donc $-n < k-j < n$ et $k-j \neq 0$

Rappelons que $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et que l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (2 à 2 distinctes) est $\left\{\omega^p,\ p \in [\![0;n-1]\!]\right\}$.

Dès lors, si $k-j > 0$, ω^{k-j} est une racine de l'unité distincte de 1.

Et si $k-j < 0$, ω^{j-k} est une racine de l'unité distincte de 1. Et donc $\omega^{k-j} = \frac{1}{\omega^{j-k}} \neq 1$

Donc : (toujours dans le cas où $k \neq j$) $[MN]_{k,j} = \frac{1}{n} \times \frac{1-\left(\omega^{k-j}\right)^n}{1-\omega^{k-j}}$

Quelle horreur ! Non, pas du tout. Pas si on oublie que ω est une racine n-ième de l'unité...

$\left(\omega^{k-j}\right)^n = \left(\omega^n\right)^{k-j} = 1^{k-j} = 1$. Donc, pour $k \neq j$, $[MN]_{k,j} = \frac{1}{n} \times \frac{0}{1-\omega^{k-j}} = 0$.

Avec N définie par : $\forall l, k \in [\![1;n]\!]$, $[N]_{l,k} = \frac{1}{n} \times \omega^{(1-k)(l-1)}$, nous avons bien : $MN = I_n$

$\boxed{M \text{ est bien inversible d'inverse } N.}$