Matrices orthogonales et majoration

Ayoub Hajlaoui

Quelle inégalité, Schwarz ou triangulaire,
saurait me libérer de ma franche galère ?

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M\ {}^tM = I_n\}$. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.
Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $i, j \in [\![1\ ; n]\!]$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient de M à la i-ème ligne et j-ième colonne (et ${}^tM$ désigne la transposée de M).

1) Montrer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|[A]_{i,j}\right| \leq n\sqrt{n}$

2) Montrer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\Big)^2 = n$

3) En déduire : $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right| \leq n$

Correction :

1) *Vu l'inégalité qu'on nous demande de démontrer, faisant intervenir cette somme (double), il semble judicieux d'exprimer coefficient par coefficient la condition d'appartenance à $O_n(\mathbb{R})$ (avec l'expression des coefficients de la matrice produit sous forme de somme).*

$A \in O_n(\mathbb{R})$ donc $A\ {}^tA = I_n$. Or : $\forall i, j \in [\![1\ ; n]\!]$, $\displaystyle[A\ {}^tA]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[{}^tA]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[A]_{j,k}$

Donc : pour tout $i \in [\![1\ ; n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[A]_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}^2 = 1.$

Et : pour tous $i, j \in [\![1\ ; n]\!]$, si $i \neq j$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[A]_{j,k} = 0$

Nous avons simplement traduit le fait que les coefficients diagonaux de $A\ {}^tA$ sont égaux à 1, et les autres à 0. Mais il me semble que nous pouvons nous satisfaire de l'information sur les coefficients égaux à 1 pour la première question... Une somme de carrés égale à 1, une (double) somme sans les carrés à majorer... Oui bonjour, c'est Cauchy-Scwharz à l'appareil.

Pour tout $i \in [\![1\ ; n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|[A]_{i,j}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|[A]_{i,j}\right| \times 1$

Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Swchwarz : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|[A]_{i,j}\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1^2}$

Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}^2 = 1$ *(que la variable muette s'appelle j ou k...).* Et : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 1^2 = n$

D'où : $\forall i \in [\![1\ ; n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|[A]_{i,j}\right| \leq \sqrt{n}$

Reste à sommer cette dernière inégalité pour tous les i de 1 à n...

Par suite : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|[A]_{i,j}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{n}$. Enfin : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|[A]_{i,j}\right| \leq n\sqrt{n}}$

2) *On veut une égalité et pas une inégalité... Cauchy-Schwarz ne nous sera pas d'une grande aide ici. Que faire, dès lors, avec cette somme de carrés de sommes* $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}\right)^2$ *? Concentrons-nous d'abord sur le carré à l'intérieur (donc avec i fixé).*

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\left(\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,j}\,[A]_{i,k}$

Voyez comme j'ai écrit ce carré de somme (donc en fait ce produit d'une somme par elle-même) en donnant deux noms d'indices (j et k) différents, pour ne pas faire de bêtise et ne pas confondre avec une somme de carrés...
Dans la dernière double somme obtenue, il semble intéressant d'isoler les termes qui correspondent à des carrés (lorsque les indices j et k prennent la même valeur, étant donné que nous savons $\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}^2 = 1$)

Donc, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\left(\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}^2 + \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n\\ j\neq k}}[A]_{i,j}\,[A]_{i,k} = 1 + \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n\\ j\neq k}}[A]_{i,j}\,[A]_{i,k}$

C'est pas mal ce 1 là... Lorsque l'on sommera pour tous les i de 1 à n, cela nous donnera n. Et c'est justement n qu'il nous faut ! Peut-être chaque double somme (pour chaque valeur de i) avec $j \neq k$ est-elle nulle ? Je ne vois pas comment aboutir à un tel résultat. Peut-être que c'est juste la somme sur tous les i de ces doubles sommes qui est nulle ! Il n'est pas évident de décrire des sommes doubles en français ; laissons donc les maths reprendre leurs droits :

Par suite : $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n\\ j\neq k}}[A]_{i,j}\,[A]_{i,k}\right) = n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{1\leq j,k\leq n\\ j\neq k}}[A]_{i,j}\,[A]_{i,k}$

Le dernier terme est une somme triple. Même pas peur ! Intervertissons, puisqu'il n'y a pas de dépendance entre i d'une part, et j et k d'autre part :

Donc $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}\right)^2 = n + \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n\\ j\neq k}}\sum_{i=1}^{n}[A]_{i,j}\,[A]_{i,k}$

Nous avons montré au cours de 1 (du fait que $A\,{}^tA = I_n$ et donc que ses coefficients diagonaux sont nuls) : pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, si $i \neq j$: $\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[A]_{j,k} = 0$

Cela revient au même que de dire : pour tous $j, k \in [\![1\,;n]\!]$, si $j \neq k$: $\sum_{i=1}^{n}[A]_{j,i}[A]_{k,i} = 0$

Mais dans notre égalité plus haut, nous avons $\sum_{\substack{1\leq j,k\leq n\\ j\neq k}}\sum_{i=1}^{n}[A]_{i,j}\,[A]_{i,k}$, *et ce n'est honnêtement pas la même chose.... Mais attendez, si $A\,{}^tA = I_n$...*

Nous savons : $A\,{}^tA = I_n$, donc, par transposition, nous avons aussi : hahaha, je vous ai bien eus, en transposant, cela redonne juste... $A\,{}^tA = I_n$. En effet, ${}^t\left(A\,{}^tA\right) = {}^t\left({}^tA\right){}^tA = A\,{}^tA$ Par contre, $A\,{}^tA = I_n$ donne une autre information...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

$A\,{}^tA = I_n$. Autrement dit : A et ${}^tA$ sont inverses l'une de l'autre. Elles commutent donc, et on a aussi : ${}^tAA = I_n$. Il s'ensuit que pour tous $j, k \in [\![1\,;n]\!]$, si $j \neq k$: $[\,{}^tAA]_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} [{}^tA]_{j,i}[A]_{i,k} = 0$

Autrement dit : pour tous $j, k \in [\![1\,;n]\!]$, si $j \neq k$: $[\,{}^tAA]_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,j}[A]_{i,k} = 0$

Et c'est justement ce qu'il nous fallait ! Oui oui, au cas où mes digressions italiques vous l'auraient fait oublier, remontez à la dernière expression obtenue de $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right)^2$, *vous verrez…*

Donc $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right)^2 = n + \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n \\ j\neq k}} \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,j}\,[A]_{i,k} = n + \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n \\ j\neq k}} 0 = n$

Nous avons bien montré : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right)^2 = n}$

3) *Peut-être une simple inégalité triangulaire pour commencer ?*

D'après l'inégalité triangulaire : $\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right|$

Réitérer cette inégalité triangulaire pour la somme intérieure ne servirait a priori à rien, puisque cela nous ramènerait à $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|[A]_{i,j}\right|$, *que nous avions majoré par* $n\sqrt{n}$ *(majoration moins précise que celle que nous voulons). À moins qu'il ne faille reprendre l'expression de la 1) et la majorer plus précisément, mais alors l'énoncé serait un peu bizarre (et ça peut arriver…) Pourquoi ne pas nous avoir demandé directement une telle majoration ?*
Mais alors que faire ? Forcément, nous servir de la 2) (cf « en déduire »)

Nous avons donc : $\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} 1 \times \left|\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2 \times \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right)^2}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En effet, nous avons juste écrit $\sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ *avec :*

$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ a_i = 1$ *et* $b_i = \left|\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right|$

Or, d'après 2) : $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right)^2 = n$. L'inégalité ci-haut donne donc : $\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right| \leq \sqrt{n \times n}$

Finalement, nous avons bien montré : $\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}\right| \leq n}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com