Somme de puissances et racines de l'unité

Ayoub Hajlaoui

Le jeune frétillon se croit au fond du trou
et à chaque question réinvente la roue.

Énoncé : (temps conseillé : 30 minutes)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit $z \in \mathbb{C}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1)$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$

Correction :

Je ne vois pas autre chose que le binôme de Newton, et me prépare donc mentalement à la gestion d'une somme double...

Posons $\displaystyle S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n$

D'après la formule du binôme de Newton : $\displaystyle S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} e^{i\frac{2\pi kj}{n}}\right)$

Deux mots sur mes choix de noms d'indices et de placement des puissances (cf formule du binôme) :

• *Il est évident que je ne dois pas appeler k l'indice de la seconde somme (c'est l'indice de la première). L'appeler i est aussi proscrit ici : la confusion avec l'imaginaire pur i serait ici inévitable.*

• *Dans la formule du binôme, je devais choisir, entre z et $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, qui élever à la puissance j, et qui élever à la puissance $n-j$. J'ai préféré donner la puissance la plus « moche » $(n-j)$ au terme qui me semblait le plus simple (à savoir z)*

En permutant les sommes (sans difficulté car les indices sont indépendants l'un de l'autre) :

$$S_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{j} z^{n-j} e^{i\frac{2\pi kj}{n}}\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{n}}\right)$$

On a sorti de la seconde somme indexée par k les facteurs ne dépendant pas de k. Et maintenant, on reconnaît une somme géométrique...

D'où : $\displaystyle S_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi j}{n}}\right)^k\right)$

Avant de se lancer corps et âme dans l'écriture de la formule, attention à bien distinguer le(s) ca(s) où la raison serait égale à 1...

Remarquons que les $e^{i\frac{2\pi j}{n}}$ (pour $j \in [\![0\ ; n-1]\!]$) sont les racines n-ièmes de l'unité, deux à deux distinctes. Et $e^{i\frac{2\pi\times 0}{n}} = 1$. Donc, pour tout $j \in [\![1\ ; n-1]\!]$, $e^{i\frac{2\pi j}{n}} \neq 1$

Je peux parler de $[\![1\ ; n-1]\!]$ parce que l'énoncé précise $n \geq 2$

Et (pour $j=n$) $e^{i\frac{2\pi\times n}{n}}=e^{i2\pi}=1$. On peut donc écrire :

$$S_n(z)=\binom{n}{0}z^{n-0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}1^k\right)+\binom{n}{n}z^{n-n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}1^k\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}z^{n-j}\left(\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi j}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi j}{n}}}\right).\text{ D'où :}$$

$$S_n(z)=z^n\times n+1\times n+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}z^{n-j}\left(\frac{1-\left(e^{i2\pi j}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi j}{n}}}\right)\quad \textit{(avec } e^{i2\pi j}=1 \textit{ pour tout entier } j\textit{)}$$

La dernière somme est nulle. Enfin, $\boxed{S_n(z)=n(z^n+1)}$

2) *À ceux qui voudraient « passer en complexes » en écrivant* $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$ *(ce qui est tout à fait exact), attention à ne pas écrire une dinguerie du style* $\mathrm{Re}(z^n)=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^n$*...*
Mais d'ailleurs, pourquoi se casser la tête alors que la question précédente peut nous être utile ?
L'égalité démontrée en 1) est valable pour tout $z\in\mathbb{C}$*. Peut-être qu'un choix judicieux de* z*...*

La formule d'Euler donnerait peut-être envie à certains de poser $z=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *pour faire apparaître du cos dans la première somme. L'idée est compréhensible, mais quelle horreur ! Votre* z *dépendrait de l'indice* k *de la somme...*
De tout façon, ça ferait du $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ *et pas du* $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$*. Peut-être qu'un angle moitié est passé par là...*
L'égalité démontrée en 1) est valable pour tout complexe z, donc en particulier pour $z=1$.
Elle donne alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=n(1^n+1)=2n$.

Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}}+e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\right)^n$ *(technique de l'angle moitié)*

$$=\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\pi}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}}+e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\pi}\right)^k\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n=2^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\ \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)\quad \textit{Oh tiens...}$$

Nous avons donc montré : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\ \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{2n}{2^n}$.

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\ \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}}$

Quel z *choisir pour cette seconde somme ? L'idée de l'angle moitié suscitée par la première peut nous guider dans ce choix...*
Rappelons l'idée générale de la technique : $e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{b-a}{2}}\right)=e^{i\frac{a+b}{2}}\times 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
On peut par exemple choisir $z=e^{i\theta}$ *tel que* $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2k\pi}{n}-\theta\right)=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ *c-à-d :*
$\frac{2k\pi}{n}-\theta=\frac{(2k-1)\pi}{n}$, *c-à-d* $\theta=\frac{\pi}{n}$
On aurait aussi pu choisir θ *tel que* $\frac{1}{2}\times\left(\theta-\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, *mais ça me donnait un* θ *légèrement plus moche alors...*

En appliquant l'égalité démontrée en 1) à $z=e^{i\frac{\pi}{n}}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=n\left(\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n+1\right)=n(e^{i\pi}+1)=n(-1+1)=0$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{(2k-1)\pi}{2n}}+e^{i\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)\right)^n$ *(toujours l'angle moitié)*

$$=\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}\left(e^{-i\frac{(2k-1)\pi}{2n}}+e^{i\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\pi}\right)^k\times e^{i\frac{\pi}{2}}\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)^n$$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = 2^n i\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\ \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ *Ouf !*

Nous avons donc montré : $2^n i\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)=0$.

Autrement dit : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)=0}$