Transformation complexe et forme exponentielle

Ayoub Hajlaoui

Retiens, c'est essentiel, ce propos qui fait sens :
La forme exponentielle est l'amie des puissances.

Énoncé :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$. On note Ω le point d'affixe 1.

1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2) Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

a) Exprimer a sous forme exponentielle.

b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

Correction :

1) L'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2 = z$.

Dans ce genre de situation, bon nombre d'élèves auront directement le réflexe suivant : poser $z = x + iy$ (avec x et y réels) pour ensuite espérer avoir des équations portant sur x et y. Si un tel réflexe peut débloquer pas mal de questions de ce genre, il s'avère contre-productif quand on pourrait faire une chose bien plus immédiate :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = 0 \ \text{ ou } \ z = 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble } \Gamma_1 \text{ est donc constitué de deux points : le point } O \text{ et le point } \Omega \text{ (d'affixe 1).}}$

2)a) $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$|a| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$

On factorise l'écriture algébrique de a par $|a|$ pour reconnaître les cosinus et sinus d'un angle particulier.

On a alors $a = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$

On cherche un angle dont le cos vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le sin vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. On sait $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On se souvient ensuite que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$a = 2\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$

Donc $\boxed{a = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2)b) Il faut résoudre l'équation $f(z) = a$ d'inconnue z. Posons $z = Re^{i\theta}$ (avec $R > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$)

On met z sous forme exponentielle pour pouvoir exploiter la forme exponentielle de a (et ça se marie très bien avec le z^2 dans l'équation).

$$\begin{aligned} f(z) = a &\Leftrightarrow z^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow R^2e^{2i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ \text{(par identification)} &\Leftrightarrow R^2 = 2 \text{ et } 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \text{ entier de } \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

En effet, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument (à 2π près).
(De même que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire)

On a alors

$$f(z) = a \Leftrightarrow R = \sqrt{2} \text{ et } \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Pourquoi R ne pourrait-il pas être égal à $-\sqrt{2}$? Le carré ferait bien 2... Tout simplement parce que R est un module, et qu'il est donc forcément positif.

Les deux solutions de cette équation sont donc $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{8}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$

On s'est restreint à $]-\pi;\pi]$ pour les angles. Tous les autres angles θ vérifiant l'équation reviennent ou bien à $-\frac{\pi}{8}$ ou bien à $\frac{7\pi}{8}$ à 2π près.

Les deux antécédents de A par f sont donc les points :

M_1 d'affixe $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et M_2 d'affixe $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$

3) Remarquons déjà que 0 est trivialement solution. Soit maintenant $z = Re^{i\theta}$ (avec $R > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$). *On ne change pas une équipe qui gagne...*

On alors $z^2 = R^2e^{2i\theta}$

z^2 est un imaginaire pur si et seulement si $2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Rappelons que les imaginaires purs sont les complexes qui ont pour argument $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

Donc z^2 est un imaginaire pur si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

En se restreignant à $]-\pi;\pi]$, l'ensemble des angles possibles est le suivant : $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$

Γ_2 est donc l'ensemble des points dont l'affixe a pour argument $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$, ainsi que l'origine du repère O. Géométriquement, Γ_2 est donc l'union des deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$

En effet (et vous pouvez regarder un cercle trigonométrique pour vous en convaincre) :

— *les complexes d'affixe $-\frac{3\pi}{4}$ sont représentés par la demi-droite d'équation $y = x$ pour $x < 0$*
— *les complexes d'affixe $-\frac{\pi}{4}$ sont représentés par la demi-droite d'équation $y = -x$ pour $x > 0$*
— *les complexes d'affixe $\frac{\pi}{4}$ sont représentés par la demi-droite d'équation $y = x$ pour $x > 0$*
— *les complexes d'affixe $\frac{3\pi}{4}$ sont représentés par la demi-droite d'équation $y = -x$ pour $x < 0$*