$fof = f$ et f dérivable sur $\mathbb{R}$

Ayoub Hajlaoui

Un coriace énoncé s'imprégnant de l'essence
de cette égalité du nom d'idempotence.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = f$

1) On pose $I = f(\mathbb{R})$. Montrer : $\forall y \in I, \; f(y) = y$
2) Montrer que I est un singleton ou $\mathbb{R}$ tout entier.
3) En déduire l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = f$

Correction :

1) *Cet énoncé gentil - pour l'instant - au point d'appeler la variable y...*
Par définition de $f(\mathbb{R})$, on a : $\forall y \in I, \; \exists x \in \mathbb{R}, \; y = f(x)$.
Dès lors : $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x)$ car $f \circ f = f$. Mais, justement : $f(x) = y$.
Donc $f(y) = y$. Nous avons bien montré : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \; f(y) = y.}$

2) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. L'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par f, c'est-à-dire $f(\mathbb{R})$, est donc aussi un intervalle.
Reste à montrer que I est soit un singleton $\{a\}$, c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a\;;a]$, soit $\mathbb{R}$ tout entier...

Il s'agit (dans le cas où ce n'est pas un singleton) de montrer tout simplement que I n'est ni majoré ni minoré. *(comme c'est un intervalle, cela fera alors de I l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier)*

Dans le cas où I n'est pas un singleton, supposons par l'absurde que I est majoré. I étant non vide par définition (par exemple, $f(0) \in I$), le théorème de la borne supérieure assure l'existence, pour I, d'une borne supérieure $b \in \mathbb{R}$

Par définition de la borne supérieure, il existe une suite (b_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$
On a alors, par continuité de f sur $\mathbb{R}$ (f est même dérivable sur $\mathbb{R}$), $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(b)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n \in I$ donc (d'après 1) $f(b_n) = b_n$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.
Par unicité de la limite, on a donc $f(b) = b$. Donc $b \in I$.
Attention, ce n'est pas d'après 1) a priori, qui donne une condition nécessaire à l'appartenance à I. Mais plutôt, par définition de $I = f(\mathbb{R})$, $b = f(b) \in \mathbb{R}$. (Et oui, cela fait effectivement en fait de la condition $f(y) = y$ une condition nécessaire et suffisante d'appartenance de y à I)

A ce stade, nous avons en fait montré que le « bord » droit de I est de la forme $b]$ ...
Mais en quoi serait-ce absurde ? On ne le voit pas tout de suite a priori. Il est peut-être temps d'utiliser cette fameuse hypothèse de dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ (pour l'instant, nous n'avons utilisé que la continuité).

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en b.

Étant donné que b est à la frontière de I, il me semble pertinent de s'intéresser aux limites du taux d'accroissement de f à droite et à gauche en b (qui devraient être égales puisque f est dérivable en b...)

Nous avons, d'une part : $f'(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{x - b}{x - b} = 1$

D'autre part : $f'(b) = \lim\limits_{x \to b^+} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim\limits_{x \to b^+} \dfrac{f(x) - b}{x - b}$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \in I$, donc en particulier : $f(x) \leq b$, et donc $f(x) - b \leq 0$.
Or, pour tout $x > b$ *(puisqu'on s'intéresse à la limite en b^+)* : $x - b > 0$ et donc $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$

D'où $\lim\limits_{x \to b^+} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$
Mais, par dérivabilité de f en b, cette limite doit être égale à 1 !
Par unicité de la limite : $1 \leq 0$, ce qui est absurde.

En conclusion, I n'est pas majoré.
Nous pouvons prouver de la même manière que I n'est pas minoré (en supposant par l'absurde l'existence d'une borne inférieure a, en prouvant $a \in I$, puis en arrivant à une absurdité en utilisant la dérivabilité en a).

En conclusion : $\boxed{I \text{ est soit un singleton, soit } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$

3) A ce stade, nous avons montré que si f était une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = f$, alors $f(\mathbb{R})$ est un singleton, auquel cas f est en fait constante sur $\mathbb{R}$, ou $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, auquel cas (d'après 1) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ (autrement dit, f est la fonction identité sur $\mathbb{R}$).

On pourrait être tenté de s'arrêter là en se disant : c'est bon, on les tient, les solutions au problème ! Ce ne serait pas rigoureux. En réalité, nous avons montré : SI f vérifie $f \circ f = f$, ALORS f est constante sur $\mathbb{R}$ ou f est la fonction identité sur $\mathbb{R}$.
C'est un raisonnement par analyse-synthèse qui ne dit pas son nom, et nous n'avons fait que la partie analyse : nous avons trouvé des conditions nécessaires sur f (certes très restrictives, et c'est tant mieux) pour que f soit solution. Place, maintenant, à la synthèse : voir si ces conditions nécessaires sont suffisantes.

Si f est constante sur $\mathbb{R}$: $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$.
f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = f(C) = C = f(x)$. Donc $f \circ f = f$

Si f est la fonction identité sur $\mathbb{R}$, f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f(f(x)) = f(x) = x$. Donc $f \circ f = f$

Synthèse facile, certes, mais ce n'est pas une raison pour la négliger...

Enfin, nous pouvons en conclure que les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f \circ f = f$ sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ et la fonction identité sur $\mathbb{R}$.