Base de Lagrange

Ayoub Hajlaoui

Vous ne comprenez pas l'intérêt de Lagrange ?
Nous allons voir en quoi cette base m'arrange.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. On admet qu'il existe une unique famille $\mathcal{L} = (L_0, L_1, .., L_n)$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :
$\forall i, j \in [\![0\ ; n]\!],\ L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Montrer que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soient $n+1$ réels $b_0, b_1, ..., b_n$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0\ ; n]\!],\ P(a_i) = b_i$

Correction :

1) *Situation fort sympathique où nous connaissons le cardinal de la famille et la dimension de l'espace vectoriel en question...*
$\mathcal{L}$ est une famille de $n+1$ vecteurs, et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Pour montrer que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre *(ou génératrice, mais libre est souvent plus simple...)*

Soient $\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ *(0 au sens, bien sûr, du polynôme nul de $\mathbb{R}_n[X]$).* Montrons que pour tout $i \in [\![1; n]\!],\ \lambda_i = 0$ *(0 au sens, bien sûr, du réel nul)*

Au vu des informations qui nous sont données (les valeurs que prennent les L_i en les réels a_j), il semble judicieux d'évaluer le polynôme (nul) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$ en chacun des a_j...

Pour tout $j \in [\![1; n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = 0$
Dans la somme, j est fixé et on fait défiler les i de 1 à n...
Par définition des L_i, tous les termes d'indice i tel que $i \neq j$ de la somme sont nuls, et le terme d'indice j vaut $\lambda_j L_j(a_j) = \lambda_j$.
On a donc, en fait : $\forall j \in [\![1; n]\!],\ \lambda_j = 0$ *(au sens, bien sûr, du réel nul)*

La famille $\mathcal{L}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) *Nous tenons une base assez particulière de $\mathbb{R}_n[X]$, à partir de laquelle nous pouvons construire des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ avec des valeurs imposées en les a_j...*

Procédons par analyse-synthèse. Soit P un tel polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. $(L_0, L_1, ..., L_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique (n+1)-uplet de réels $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$

On a alors, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $P(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(a_j) = b_j$. Or, $P(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(a_j) = \alpha_j$

D'où, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\alpha_j = b_j$

Le polynôme $\boldsymbol{P}$ est donc nécessairement $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$, ce qui le définit de manière unique.

S'il existe, ce polynôme est unique... Passons maintenant à la synthèse.

Réciproquement, soit $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$.

$\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $P(a_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i(a_j) = b_j$. Ce polynôme $\boldsymbol{P}$ est bien solution du problème.

Nous avons bien montré, pour tous réels $b_0, b_1, ..., b_n$, l'existence d'un unique polynôme $\boldsymbol{P}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0\,;n]\!]$, $P(a_i) = b_i$

Autrement dit, étant donnés $n+1$ points distincts du plan, il existe une unique fonction polynomiale de degré n dont la représentation graphique passe par ces $n+1$ points...