Théorème de Gauss-Lucas

Ayoub Hajlaoui

Les zéros de la dérivée
par cet enclos sont captivés.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant à r racines distinctes notées $z_1, ..., z_r$

1) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicités.

2) Soit z une racine de P'. Montrer qu'il existe r réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tels que $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k z_k$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$

Autrement dit, montrer que toute racine de P' est une combinaison convexe des racines de P.
Ou encore autrement dit, montrer que toute racine de P' est un barycentre à coefficients positifs des racines de P.
Ou encore autrement dit (dernière reformulation, promis), montrer que toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Correction :

1) Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ étant scindé sur $\mathbb{C}$, on peut écrire $P = a\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - z_k)^{m_k}$, où $a \in \mathbb{C}^*$ (P est non constant donc non nul), et où, pour tout $k \in [\![1\ ;\ r]\!]$, m_k est la multiplicité de la racine z_k de P.

En dérivant cette expression de P, on obtient : $P' = a\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k (X - z_k)^{m_k - 1} \prod_{1 \leq j \leq r, j \neq k} (X - z_j)^{m_j}$
C'est la somme des termes obtenus en dérivant à tour de rôle chaque facteur $(X - z_k)^{m_k}$ de P.

Donc $$\frac{P'}{P} = \frac{a\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k (X - z_k)^{m_k - 1} \prod_{1 \leq j \leq r,\ j \neq k} (X - z_j)^{m_j}}{a\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - z_k)^{m_k}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k (X - z_k)^{m_k - 1} \prod_{1 \leq j \leq r,\ j \neq k} (X - z_j)^{m_j}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{r}(X - z_j)^{m_j}}$$
J'ai changé le nom de l'indice du produit au dénominateur pour pouvoir l'incorporer dans la somme du numérateur sans faire de bêtise...

On peut donc écrire : $$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \left(m_k (X - z_k)^{m_k - 1} \frac{\displaystyle\prod_{1 \leq j \leq r,\ j \neq k} (X - z_j)^{m_j}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{r}(X - z_j)^{m_j}} \right) \quad \text{(par linéarité)}$$

D'où : $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\left(m_k(X-z_k)^{m_k-1}\dfrac{\displaystyle\prod_{1\le j\le r,\ j\ne k}(X-z_j)^{m_j}}{(X-z_k)^{m_k}\displaystyle\prod_{1\le j\le r,\ j\ne k}(X-z_j)^{m_j}}\right)$. Enfin, $\boxed{\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k}{X-z_k}}$

2) Soit z une racine de P'.

On a bien envie d'utiliser la question précédente en appliquant $\dfrac{P'}{P}$ à z, mais cela ne peut se faire que si $P(z) \ne 0$...

Si $P(z) = 0$, c'est-à-dire si z est une racine de P, il existe $j \in [\![1\ ;\ r]\!]$ tel que $z = z_j$

Et on voulait montrer quoi, déjà ?

En posant $\lambda_j = 1$ et, pour tout $k \in [\![1\ ;\ r]\!] \setminus \{j\}$, $\lambda_k = 0$, on a bien : $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\lambda_k z_k$

Les λ_k sont tous positifs et leur somme vaut bien 1.

Si $P(z) \ne 0$: d'une part, $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = 0$ puisque z est une racine de P'.

Et d'autre part, d'après 1) : $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k}{z-z_k}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k}{z-z_k} = 0$

D'accord, mais que faire de cette information ? Comment faire apparaître des réels positifs dans tout ça ? Que faire des complexes aux dénominateurs ? Conjugaison est le maître mot.

Par suite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k \times \overline{z-z_k}}{|z-z_k|^2} = 0$. Autrement dit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\left(\dfrac{m_k\overline{z}}{|z-z_k|^2} - \dfrac{m_k\overline{z_k}}{|z-z_k|^2}\right) = 0$

On essaye de reformuler autrement l'égalité obtenue en espérant voir quelque chose qui nous rapproche du résultat.

On obtient, par linéarité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k\overline{z}}{|z-z_k|^2} - \sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k\overline{z_k}}{|z-z_k|^2} = 0$, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k\overline{z}}{|z-z_k|^2} = \sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k\overline{z_k}}{|z-z_k|^2}$

Mais dans tout ce bazar, c'est z qui nous intéresse... Remarquons déjà la présence de $\overline{z}$ en facteur dans chaque terme de la première somme...

D'où : $\overline{z}\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k}{|z-z_k|^2} = \sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k\overline{z_k}}{|z-z_k|^2}$. Et en passant au conjugué : $z\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k}{|z-z_k|^2} = \sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k z_k}{|z-z_k|^2}$

Chaque m_k étant un entier naturel non nul (multiplicité de la racine z_k de P), $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k}{|z-z_k|^2}$ est un nombre réel strictement positif (donc a fortiori non nul).

Donc $z = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k z_k}{|z-z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k}{|z-z_k|^2}} = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\dfrac{m_k z_k}{|z-z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\dfrac{m_j}{|z-z_j|^2}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\left(\dfrac{\dfrac{m_k}{|z-z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\dfrac{m_j}{|z-z_j|^2}} \times z_k\right)$

De la première fraction à la deuxième, j'ai juste changé le nom de l'indice au dénominateur (k est devenu j) pour plus de prudence, afin de pouvoir incorporer la somme du dénominateur dans le numérateur par linéarité (et ce, sans m'emmêler les pinceaux dans les indices).

En posant, pour tout $k \in [\![1\ ;\ r]\!]$, $\lambda_k = \dfrac{\dfrac{m_k}{|z-z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\dfrac{m_j}{|z-z_j|^2}}$, on a z_k positif, et $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\lambda_k z_k$

De plus : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = \sum_{k=1}^{r} \frac{\dfrac{m_k}{|z-z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \dfrac{m_j}{|z-z_j|^2}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \dfrac{m_k}{|z-z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \dfrac{m_j}{|z-z_j|^2}} = 1$

On a bien montré ce qui suit :

$$\boxed{\text{pour toute racine } \boldsymbol{z} \text{ de } \boldsymbol{P'}, \text{ il existe } \boldsymbol{r} \text{ réels positifs } \lambda_1, ..., \lambda_r \text{ tels que } z = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k z_k \text{ avec } \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com