Théorème du point fixe de Tarski

Ayoub Hajlaoui

La main jamais ne tremble et fixe bien sa cible :
en jouant des ensembles tout devient possible.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ une fonction croissante. On rappelle qu'un point fixe de f est un réel x tel que $f(x) = x$. Soit $\boldsymbol{B} = \{x \in [0\,;1],\ f(x) \geq x\}$

1) Montrer que $\boldsymbol{B}$ admet une borne supérieure $\boldsymbol{\beta}$, puis montrer que $\boldsymbol{\beta}$ est un point fixe de f. On montrerait de même que l'ensemble $\boldsymbol{A} = \{x \in [0\,;1],\ f(x) \leq x\}$ admet une borne inférieure $\boldsymbol{\alpha}$, et que $\boldsymbol{\alpha}$ est un point fixe de f.

2) En déduire que f admet un plus petit et un plus grand point fixe.

Correction :

1) *Ne pas oublier de montrer que $\boldsymbol{B}$ est non vide !*

Montrons que $\boldsymbol{B}$ est non vide. *Il faut exhiber un élément x_0 de $[0\,;1]$ tel que $f(x_0) \geq x_0$ (ou du moins justifier son existence)...*

Pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$. Autrement dit, $0 \leq f(x) \leq 1$. Cet encadrement reste en particulier valable pour $x = 0$, et on a donc $0 \leq f(0)$. Donc $0 \in \boldsymbol{B}$. $\underline{\boldsymbol{B}\text{ est donc non vide.}}$

Par ailleurs, $\boldsymbol{B} \subset [0\,;1]$, donc $\underline{\boldsymbol{B}\text{ est majorée}}$ par 1.

$\boldsymbol{B}$ étant une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, le théorème de la borne supérieure nous permet de conclure que $\boxed{\boldsymbol{B}\text{ admet une borne supérieure }\boldsymbol{\beta}.}$

Montrons maintenant que $f(\beta) = \beta$. *Comment faire ? On peut supposer le contraire par l'absurde, en supposant le contraire, et en distinguant deux cas... Attention, on n'a aucune raison de penser a priori que $\beta \in \boldsymbol{B}$ (et donc que β vérifierait d'emblée $f(\beta) \geq \beta$). La borne supérieure de $\boldsymbol{B}$ n'a aucune raison a priori d'appartenir à $\boldsymbol{B}$...*

Supposons par l'absurde que $f(\beta) \neq \beta$. Deux cas de figure sont alors possibles :

• si $f(\beta) < \beta$: β étant la borne supérieure de $\boldsymbol{B}$, il existe $x \in \boldsymbol{B}$ tel que $f(\beta) < x \leq \beta$

On peut en effet prendre des éléments de $\boldsymbol{B}$ aussi proches que l'on veut de la borne supérieure β. La définition des ϵ à laquelle vous êtes probablement habitués donne effectivement :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in \boldsymbol{B},\ \beta - \epsilon < x \leq \beta$. *Attention à ne pas oublier le « inférieur ou égal » entre x et β. Pensez par exemple à un ensemble $\boldsymbol{E}$ qui serait un singleton $\{x\}$. Dans un tel ensemble, la borne supérieure serait x (atteinte dans ce cas), mais, pour un $\epsilon > 0$ donné, on n'aurait évidemment pas l'existence d'un élément de $\boldsymbol{E}$ qui serait dans $]x - \epsilon\,; x[$...*
En prenant $\epsilon = \beta - f(\beta)$, qui est bien strictement positif, on a bien l'encadrement $f(\beta) < x \leq \beta$

Oh, des inégalités, et oh, une fonction f croissante sur $[0\,;1]$... En appliquant f, croissante sur $[0\,;1]$, à l'inégalité $x \leq \beta$, on obtient : $f(x) \leq f(\beta)$
Pourquoi ne pas l'avoir appliqué à tout l'encadrement ? Parce que $f(f(\beta))$ ne m'intéresse pas particulièrement, vous si ?

Mais, par hypothèse, $f(\beta) < x$. Donc $f(x) \leq f(\beta) < x$, et donc, par transitivité, $f(x) < x$.
Et c'est bien une infériorité stricte, il suffit qu'il y ait une infériorité stricte dans la chaîne...
Donc $x \notin B$, ce qui est absurde (puisqu'on a dit : $x \in B$)

• si $f(\beta) > \beta$:
Là, on ne peut plus introduire un x compris entre ces deux nombres qui soit dans B... À moins de prendre $x = \beta$ qui, remarquons-le, dans ce cas, appartient à B par définition de B. Bof... Par contre, on peut toujours prendre un réel x quelconque (pas forcément dans B) strictement compris entre $f(\beta)$ et β, essayer de faire jouer la croissance de f, et faire dire à ce x plus de choses qu'il ne voulait nous dire au départ...

Il existe un réel $x \in [0\,;1]$ tel que $f(\beta) > x > \beta$.
Évident, mais si on veut l'expliciter, on peut prendre par exemple $x = \dfrac{f(\beta)+\beta}{2}$
En particulier, $x > \beta$, et, par croissance de f sur $[0\,;1]$, on obtient : $f(x) \geq f(\beta)$.
Et on savait : $f(\beta) > x$. Donc $f(x) > x$. D'où, a fortiori, $f(x) \geq x$, et donc $x \in B$. ABSURDE !
Ah bon, pourquoi ?
En effet, x est un réel de B strictement plus grand que la borne supérieure β de B.
Soit dit en passant, on aurait pu prendre au départ x tel que $f(\beta) \geq x > \beta$, et on serait parvenus à la même absurdité.

La supposition de départ « $f(\beta) \neq \beta$ » était donc fausse, et on a en fait : $f(\beta) = \beta$.
$\boxed{\beta \text{ est donc bien un point fixe de } f.}$

*Rebelote pour A et α ? Pas du tout, faites bien attention au conditionnel « on montrer**ait** » ,parfois employé dans les énoncés comme celui-là. Sous-entendu, « si on le voulait, on montrerait de même... »*
L'idée de la démonstration serait tout à fait similaire. Cette fois-ci, le caractère non vide de A serait prouvé en remarquant que $1 \in A$. Le caractère minoré (par 0) est évident. D'où l'existence de α, borne inférieure de A.
Puis, pour montrer $f(\alpha) = \alpha$, on procéderait, de même que pour β, par l'absurde, en distinguant deux cas.

2) *« Un plus petit »et « un plus grand ». Il s'agit en fait de montrer que l'ensemble des points fixes de f admet un minimum et un maximum...*

Considérons l'ensemble C des points fixes de f. $C = \{x \in [0\,;1],\ f(x) = x\}$

Ce serait sympa de remarquer un rapport entre cet ensemble et les ensembles A et B introduits précédemment...

Par définition : $C = A \cap B$. C est non vide (car $\alpha \in C$ et $\beta \in C$)
Et : $\forall x \in C,\ x \in A$ (car $C \subset A$) donc $x \geq \alpha$ (car α borne inférieure de A)
Et : $\forall x \in C,\ x \in B$ (car $C \subset B$) donc $x \leq \beta$ (car β borne supérieure de B)
Donc : $\forall x \in C,\ \alpha \leq x \leq \beta$. De plus, $\alpha \in C$ et $\beta \in C$.
C admet donc un maximum (qui est β) et un minimum (qui est α).

Autrement dit, $\boxed{f \text{ admet bien un plus petit et un plus grand point fixe.}}$