Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants

Ayoub Hajlaoui

« Un titre fort dodu ! »Riez-en mais d'abord sachez qu'il s'agit du chapitre que j'abhorre.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Résoudre sur $]1\,;+\infty[$ l'équation différentielle $(E)\ :\ (1-t)y'-y=t$

Correction :

Sur $]1\,;+\infty[$, cette équation différentielle (E) est équivalente à : $y'-\dfrac{1}{1-t}y=\dfrac{t}{1-t}$
Une fonction y définie (et dérivable) sur $]1\,;+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si : $\forall t\in\,]1\,;+\infty[,\ y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$, avec $a(t)=-\dfrac{1}{1-t}$ et $b(t)=\dfrac{t}{1-t}$

Commençons par déterminer l'expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H) : $y'-\dfrac{1}{1-t}y=0$

a est continue sur $]1\,;+\infty[$ et une primitive de a sur cet intervalle est la fonction A définie par $A(t)=\ln|1-t|$ *Attention à ne pas oublier la valeur absolue, qui change la donne ici... Trop concentrés sur le fait de ne pas se tromper sur le signe devant le ln (compensation du $-$ devant la fraction et du $-$ devant le t au dénominateur), les élèves oublient souvent la valeur absolue dans ce genre de situation...*
Pour tout $t>1$, $1-t\leq 0$ donc $\ln|1-t|=\ln(t-1)$.
Les solutions de (H) sur $]1\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $t\longmapsto Ce^{-A(t)},\quad C\in\mathbb{R}$
Pour tout $t>1$, $e^{-A(t)}=e^{-\ln(t-1)}=\dfrac{1}{e^{\ln(t-1)}}=\dfrac{1}{t-1}$.
Les solutions de (H) sur $]1\,;+\infty[$ sont donc les fonctions de la forme $t\longmapsto\dfrac{C}{t-1},\quad C\in\mathbb{R}$

Cherchons maintenant une solution particulière y_p de (E) sur $]1\,;+\infty[$.
Variation de la constante ? Du calme, pas si vite. Avant d'enclencher l'artillerie lourde, voyons s'il n'y a pas une solution évidente ou, du moins, un a priori intéressant que l'on pourrait avoir sur la forme de la solution à chercher... Pour ce faire, n'oublions pas qu'on peut reprendre la forme initiale de (E) (avant division par $1-t$)...

$(E)\ :\ (1-t)y'-y=t$. *Vus les deux membres de l'égalité, il semble intéressant de chercher une solution particulière polynomiale, plus particulièrement de degré 1 (donc une fonction affine en fait)*
On cherche y_p de la forme $y_p(t)=ct+d$, où c et d sont deux réels à déterminer.
Je ne les appelle pas a et b, pour éviter de faire doublon avec les fonctions a et b introduites précédemment...

y_p vérifie (E) si et seulement si : $\forall t\in\,]1\,;\,+\infty[,\ (1-t)c-(ct+d)=t$, c'est-à-dire si et seulement si : $\forall t\in\,]1\,;\,+\infty[,\ -2ct+c-d=t$

Par identification (égalité de deux fonctions polynomiales sur un intervalle [non réduit à un point], donc égalité deux à deux de leurs coefficients), y_p vérifie (E) si et seulement si $-2c = 1$ et $c - d = 0$
Autrement dit, si et seulement si $c = d = -\dfrac{1}{2}$

Une solution particulière de (E) sur $]1\,;+\infty[$ est donc $y_p : t \longmapsto -\dfrac{1}{2}(t+1)$

Il ne reste plus qu'à additionner la solution générale de (H) *et la solution particulière obtenue de* (E)

Nous pouvons enfin conclure que les solutions de (E) sur $]1\,;+\infty[$ sont les fonctions y définies sur $]1\,;+\infty[$ par $y : t \longmapsto \dfrac{C}{t-1} - \dfrac{1}{2}(t+1)$, avec $C \in \mathbb{R}$