Une caractérisation de la bijectivité

Ayoub Hajlaoui

De leur amour naissant, voici la belle ébauche :
« tu es, je le pressens, ma seule inverse à gauche. »

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soient E et F deux ensembles tels que E possède au moins deux éléments distincts.
Soit $f : E \to F$ une application telle qu'il existe une unique application $g : F \to E$ vérifiant : $\forall x \in E,\ g\big(f(x)\big) = x$
On cherche à démontrer que f est bijective.

Supposons qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $f\big(g(y_0)\big) \neq y_0$.
1) Montrer que $y_0 \notin \mathrm{Im} f$.
2) Déterminer une application $h : F \to E$, différente de g, vérifiant : $\forall x \in E, h\big(f(x)\big) = x$
3) Conclure.

Correction :

1) *La définition de l'appartenance à Imf est plus commode à manipuler que celle de la non-appartenance à Imf...*
Supposons par l'absurde que $y_0 \in \mathrm{Im} f$.
Il existe alors $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = y_0$. En composant par g à gauche, on obtient : $g\big(f(x_0)\big) = g(y_0)$. Et, par hypothèse de l'énoncé : $g\big(f(x_0)\big) = x_0$. Donc $g(y_0) = x_0$. Et donc $f\big(g(y_0)\big) = f(x_0) = y_0$, ce qui contredit l'hypothèse $f\big(g(y_0)\big) \neq y_0$. Donc $\boxed{y_0 \notin \mathrm{Im} f}$

2) *y_0 n'appartient pas à Imf. Donc si on fait en sorte que h renvoie la même image que g pour tout élément de F sauf y_0, h devrait jouir de la même propriété que g...*
Soit x_0 un élément de E différent de $g(y_0)$. L'existence d'un tel x_0 est garantie par le fait que E possède au moins deux éléments distincts.
Soit h l'application définie sur F comme suit :
- pour tout $y \in F$, si $y \neq y_0$, $h(y) = g(y)$
- $h(y_0) = x_0$ *Et on sait $x_0 \neq g(y_0)$...*

Comme $h(y_0) \neq g(y_0)$, les applications h et g ne sont pas égales.
De plus, pour tout $x \in E$, $h\big(f(x)\big) = g\big(f(x)\big)$ car $f(x) \in \mathrm{Im} f$ par définition, et y_0, le seul élément de F pour lequel $h(y_0) \neq g(y_0)$, n'est pas dans Imf.
Donc, pour tout $x \in E$, $h\big(f(x)\big) = x$ (par hypothèse de l'énoncé sur g).

3) Le résultat obtenu en 2) contredit l'hypothèse d'unicité de g dans l'énoncé. La supposition « il existe $y_0 \in F$ tel que $f\big(g(y_0)\big) \neq y_0$ » est donc fausse. Autrement dit, on a, pour tout $y \in F, f\big(g(y)\big) = y$. En conclusion, $f \circ g$ est l'application id_F, en plus du fait que $g \circ f$ est l'application id_E (d'après l'énoncé).
On peut donc en conclure que $\boxed{f \text{ est bijective, et que } f^{-1} = g.}$

Et, toute seule, l'hypothèse $g \circ f = id_E$ ne suffisait pas à établir ce résultat...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com