Démontrer une convergence de deux façons

Ayoub Hajlaoui

Parvenons à nos fins par deux sentiers distincts
dont les pluvieux parfums réveillent nos instincts.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure)

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 4$.
   (b) Montrer que $\left(u_n\right)$ est croissante.
   (c) En déduire que $\left(u_n\right)$ converge et déterminer sa limite.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(4 - u_n\right).$$

   (b) En déduire une autre manière de retrouver le résultat de **1. c**.
   On pourra s'intéresser à la suite (v_n) définie par $v_n = 4 - u_n$

Correction :

1)a) *Une proposition à montrer pour tout entier naturel n... Une suite définie par une formule de récurrence... Et on ne voit pas trop comment attaquer avec un calcul direct... Tout naturellement, je vous prescris une démonstration par récurrence.*

Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, la propriété P_n :
« $0 \leq u_n \leq 4$ » est vraie.

Initialisation : $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 4$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, et montrons P_{n+1}. Autrement dit, supposons $0 \leq u_n \leq 4$, et montrons $0 \leq u_{n+1} \leq 4$
$0 \leq u_n \leq 4$ donc (en multipliant par $3 > 0$) $0 \leq 3u_n \leq 12$ et $4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$.
Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $0 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$. Donc : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.
On a bien montré : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :
$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq 4.}$

1)b) *Pour étudier les variations d'une suite (u_n) définie par récurrence, la bonne vieille méthode consistant à comparer u_{n+1} et u_n (par exemple en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$) marche très souvent. Elle marche bien ici, à condition d'utiliser judicieusement la question précédente.*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$
Or d'après 1)a), nous savons : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 4 \geq u_n$. Donc $3u_n + 4 \geq 3u_n + u_n$
Autrement dit : $3u_n + 4 \geq 4u_n$ avec $4u_n \geq 0$ (car $u_n \geq 0$)
Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\sqrt{3u_n + 4} \geq \sqrt{4u_n} \geq \sqrt{u_n \times u_n}$
Donc $\sqrt{3u_n + 4} \geq \sqrt{u_n^2}$

Profitons-en pour rappeler qu'en général, $\sqrt{x^2}$ n'est pas égal à x mais à $|x|$. Dans le cas où x est positif, on a bien $\sqrt{x^2} = x$.
Par suite, $\sqrt{3u_n + 4} \geq u_n$. Autrement dit, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$

Cette question n'était pas difficile en termes de calculs.
Par contre, penser à écrire $\sqrt{3u_n + 4} \geq \sqrt{3u_n + u_n}$ est relativement original. Même ceux qui ont vu qu'il fallait utiliser la question 1 penseraient, en général, à écrire $\sqrt{3u_n + 4} \leq \sqrt{3 \times 4 + 4} = 4$. Même si c'est vrai, ça ne servait à rien ici, puisqu'on veut montrer $u_{n+1} \geq \ldots$ et non $u_{n+1} \leq \ldots$

Il était aussi possible de traiter cette question sans se servir de la question 1, en démontrant par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$. Pour l'initialisation, on calcule u_1 pour montrer $u_1 \geq u_0$. Dans l'hérédité, il suffit d'utiliser le fait que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est une fonction croissante sur $[0\ ;\ 4]$ (ce qui permet de passer de $u_{n+1} \geq u_n$ à $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$).
Mais comparée à la première méthode détaillée dans le corrigé, cette démonstration par récurrence est fastidieuse.

1)c) *Question cadeau, même au cas où les précédentes n'auraient pas été réussies.*

La suite (u_n) est croissante (d'après 1)a)) et majorée par 4 (d'après 1)b)). $\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ converge.}}$

Bien entendu, ne pas tomber dans le piège de débutant consistant à dire « donc (u_n) converge vers 4 »... Au passage, (u_n) est aussi majorée par 7, par 3π, par 123,9...

Soit l la limite de (u_n). Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 4$. Donc $0 \leq l \leq 4$. *(Par passage à la limite, les inégalités larges se conservent)*
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$
D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
D'autre part, par continuité de la fonction f sur $[0\ ;\ 4]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$.
Par unicité de la limite, on obtient l'égalité suivante : $l = f(l)$.
Beaucoup d'entre vous (mais pas tous..) ont probablement vu ce résultat en cours, auquel cas ils n'ont pas besoin de détailler comment on obtient l'égalité $l = f(l)$ comme je l'ai fait.

Donc $l = \sqrt{3l + 4}$, ce qui donne, en élevant au carré : $l^2 = 3l + 4$. Donc $l^2 - 3l - 4 = 0$.
On calcule le discriminant Δ de $X^2 - 3X - 4$: $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$
Ce polynôme du second degré a donc deux racines $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$
Donc soit $l = -1$, soit $l = 4$. Mais on a dit plus haut : $0 \leq l \leq 4$. Donc $l = 4$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers 4.}}$

D'aucuns pourraient rétorquer : « tu vois, tu nous as interdit de dire dès le début qu'elle convergeait vers 4. Et... elle converge bien vers 4 ! »Ce à quoi je répondrais simplement que parvenir au bon résultat par un raisonnement faux n'intéresse pas le matheux, pour qui le cheminement compte au moins presque autant que la destination.

2)a) *On nous demande de montrer un encadrement. Ou, si vous préférez, deux inégalités. La question a beau être difficile, rien ne vous interdit de vous attaquer en premier lieu à l'inégalité la plus simple, pour vous assurer quelques points.*
D'après 1)a), pour tout entier naturel n : $u_n \leq 4$. On a donc notamment : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq 4$.
Autrement dit, on a : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_{n+1} \geq 0}$. Montrons maintenant : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4}$. *Et alors ? Comment faire apparaître du $4 - u_n$?*

$$4 - u_{n+1} = (4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4}) \times \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \quad (\text{car } 4 + \sqrt{3u_n + 4} \neq 0)$$

(technique de la quantité conjuguée, pour faire apparaître une identité remarquable et faire sauter la racine)

Donc $4 - u_{n+1} = \left(4^2 - (\sqrt{3u_n + 4})^2\right) \times \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \left(16 - 3u_n - 4\right) \times \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$

D'où : $4-u_{n+1} = (12-3u_n)\times\frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = 3\times(4-u_n)\times\frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = (4-u_n)\times\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$
Voilà donc le $4-u_n$ que nous cherchions à faire apparaître. Reste donc tout simplement à montrer que le facteur de droite est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$

$4 + \sqrt{3u_n + 4} \geq 4 + \sqrt{4}$ (par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$)
Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{3}{4 + \sqrt{4}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

En multipliant l'inégalité $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}$ par $4 - u_n \geq 0$, on obtient finalement :

$\underline{4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)}$. En conclusion, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : 0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(4 - u_n\right)}$

2)b) *Ok. Là, on tient vraiment une question difficile pour des Terminale car peu guidée.*

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 4 - u_n$. On a montré en 2)a) : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times v_n$.

Donc en fait, $v_1 \leq \frac{1}{2} \times v_0$, puis $v_2 \leq \frac{1}{2} \times v_1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times v_0 = (\frac{1}{2})^2 v_0$, de même $v_3 \leq (\frac{1}{2})^3 v_0$... D'où l'idée de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq (\frac{1}{2})^n v_0$..

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété Q_n : « $v_n \leq (\frac{1}{2})^n v_0$ » est vraie.

<ins>Initialisation</ins> : $(\frac{1}{2})^n v_0 = v_0$. Donc $0 \leq v_0 \leq (\frac{1}{2})^0 v_0$ et Q_0 est vraie.

<ins>Hérédité</ins> : Supposons Q_n vraie pour un certain entier naturel n, et montrons Q_{n+1}. Autrement dit, supposons $v_n \leq (\frac{1}{2})^n v_0$, et montrons $v_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^{n+1} v_0$
$v_n \leq (\frac{1}{2})^n v_0$ et $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times v_n \leq \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^n v_0 = (\frac{1}{2})^{n+1} v_0$. On a bien montré : $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$. La propriété est héréditaire.
<ins>Conclusion</ins> : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :

$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ v_n \leq (\frac{1}{2})^n v_0.}$ De plus, d'après 2)b), $v_n \geq 0$.

Donc pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq (\frac{1}{2})^n v_0$. Et comme $\frac{1}{2} \in]-1\ ;\ 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n v_0 = 0$
On en conclut, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Or, pour tout entier naturel n, $v_n = 4 - u_n$, c'est-à-dire : $u_n = 4 - v_n$. Finalement, par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com