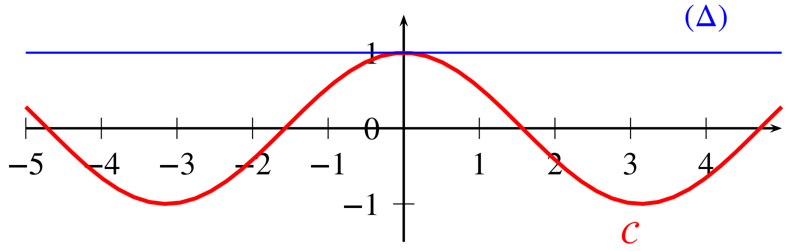
Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Ayoub Hajlaoui

Sur ces vagues d'humeur, tanguez petit navire !
Prenez, fourbe écumeur, la tangente à venir.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min)

En rouge, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction cosinus. La droite (Δ), tangente de la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, a pour équation $y = 1$.



1) Montrer : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0$

2) On admet de plus la limite suivante : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$

Pour une démonstration, voir l'exercice Démonstration géométrique d'une limite trigonométrique.

En déduire que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout point $a \in \mathbb{R}$, et calculer leurs dérivées.

Correction :

1) *A quoi nous fait penser une telle limite ? A un nombre dérivé...*

D'après l'énoncé, la tangente (Δ) à la courbe de la fonction cosinus au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1$.

D'après le cours, le coefficient directeur de (Δ) est le nombre dérivé de la fonction cosinus en 0. Donc le le coefficient directeur de (Δ) est égal à $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h}$

Mais que vaut le coefficient directeur de (Δ) ?

Le coefficient directeur de (Δ) est 0.

Ben oui, son équation est $y = ax + b$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Donc $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0.}$

2) *Il va falloir bien entendu s'intéresser à des limites de taux d'accroissement...*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On va s'intéresser à $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h}$

Pour ces deux limites, quand h tend vers 0, le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0 : c'est une forme indéterminée (c'est-à-dire qu'on ne peut pas en conclure la limite). Il va falloir exprimer ces quotients autrement pour parvenir à calculer leurs limites. Pour l'instant, pas besoin de nous trimballer avec " lim " dans tous nos calculs, on s'intéressera à limite quand on arrivera à exprimer le taux d'accroissement de manière plus " simple " pour déterminer cette limite...

Que faire ? Qui transformer ? Si on se souvient de ses formules de trigonométrie :
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ *et* $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ ...

Donc, pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \dfrac{\sin(a)\cos(h)+\sin(h)\cos(a)-\sin(a)}{h}$

N'oublions pas que nous savons des choses sur les limites de $\dfrac{\cos(h)-1}{h}$ *et de* $\dfrac{\sin(h)}{h}$ ...

Donc $\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \dfrac{\sin(a)\big(\cos(h)-1\big)+\sin(h)\cos(a)}{h}$ *(simple factorisation)*

Donc $\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\dfrac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\dfrac{\sin(h)}{h}$ *(regroupement " intelligent ")*

Or, nous savons : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$ (question 1) et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ (énoncé)

Donc par opérations simples sur les limites : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\times 0 + \cos(a)\times 1$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \cos(a)$. La limite du taux d'accroissement existe et est finie.

On peut donc en déduire que $\boxed{\text{la fonction sinus est dérivable en tout point } a \in \mathbb{R}}$, et son nombre dérivé en ce point est $\cos(a)$. Autrement dit, $\boxed{\text{la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.}}$

On procède de même pour la fonction cosinus. Pour tout $h \neq 0$:

$\dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \dfrac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}$ *(formule trigonométrique rappelée)*

Donc $\dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \dfrac{\cos(a)\big(\cos(h)-1\big)-\sin(a)\sin(h)}{h}$ *(simple factorisation)*

Donc $\dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \cos(a)\dfrac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\dfrac{\sin(h)}{h}$ *(regroupement " intelligent ")*

Or, nous savons : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$ (question 1) et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ (énoncé)

Donc par opérations simples sur les limites : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \cos(a)\times 0 - \sin(a)\times 1$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = -\sin(a)$. La limite du taux d'accroissement existe et est finie.

On peut donc en déduire que $\boxed{\text{la fonction cosinus est dérivable en tout point } a \in \mathbb{R}}$, et son nombre dérivé en ce point est $-\sin(a)$.

Autrement dit, $\boxed{\text{la dérivée de la fonction cosinus est la fonction - sinus.}}$