Deux séries de même nature

Ayoub Hajlaoui

En termes de nature, ces séries s'associent :
si l'une est convergente, alors sa sœur aussi.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Correction :

Autrement dit, il s'agit de montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge.*
Quid de la divergence ? Et bien, dire « $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge » revient exactement à dire «* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge si et seulement si* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge » (par double contraposition)*

Montrons d'abord que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge aussi.

Comment faire ? On n'a rien sur l'expression de v_n *! Mais on a un lien entre* u_n *et* v_n*...*

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *condition nécessaire de convergence d'une série*

Et alors ? Qu'est-ce que ça dit sur v_n *?*

Donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + u_n = 1$.

J'ai envie d'écrire : $\dfrac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$*. Mais pour que cela ait un sens, il ne faut pas que* (u_n) *soit nulle à partir d'un certain rang. Être équivalent à* 0 *n'a pas de sens...*

Si (u_n) est nulle à partir d'un certain rang, alors (v_n) aussi, et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge trivialement.

Sinon : $\dfrac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Autrement dit : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

Or, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge aussi.

Donc $\boxed{\text{si } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge, alors } \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge aussi.}}$

Réciproquement, montrons que si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge aussi.

Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Autrement dit : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$

À partir de cette information, comment accéder rapidement à une info sur u_n ? Je serais tenté, par passage à l'inverse, d'écrire $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+u_n}{u_n} = +\infty$ (car $\dfrac{u_n}{1+u_n} \geq 0$), mais, problème : rien ne me garantit que u_n est non nul. Essayons donc autre chose.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, donc $v_n(1+u_n) = u_n$. D'où : $v_n + v_n u_n = u_n$, ou encore : $v_n = u_n(1-v_n)$.

Ce serait bien d'exprimer u_n en fonction de v_n, mais ça coûterait de diviser par $1 - v_n$, qui peut être nul ! Bon, je pourrais justifier que, v_n tendant vers 0, $1 - v_n$ est non nul à partir d'un certain rang, mais ce serait une perte de temps. Voyez plutôt :

$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1 - v_n = 1$. Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n(1-v_n)$. Si (u_n) est nulle à partir d'un certain rang, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge trivialement.

Sinon : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Or, $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge aussi.

Donc $\boxed{\text{si } \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge, alors } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge aussi.}}$

En conclusion, $\boxed{\text{les séries } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geq 0} v_n \text{ sont de même nature.}}$